Superpoderes Matemáticos para Concursos Militares

Volume 5F

2ª edição

COLÉGIO NAVAL 1986-1990

Renato Madeira

www.madematica.blogspot.com

Sumário

INTRODUÇÃO

Esse livro é uma coletânea com as questões das Provas de Matemática do Concurso de Admissão ao Colégio Naval (CN) dos anos de 1984 a 2016, mais uma "faixa bônus" com 40 questões anteriores a 1984, detalhadamente resolvidas e classificadas por assunto. Na parte F serão apresentadas as provas de 1986 a 1990, totalizando 110 questões.

No capítulo 1 encontram-se os enunciados das provas, para que o estudante tente resolvê-las de maneira independente.

No capítulo 2 encontram-se as respostas às questões e a sua classificação por assunto. É apresentada também uma análise da incidência dos assuntos nesses 32 anos de prova.

No capítulo 3 encontram-se as resoluções das questões. É desejável que o estudante tente resolver as questões com afinco antes de recorrer à sua resolução.

Espero que este livro seja útil para aqueles que estejam se preparando para o concurso da Colégio Naval ou concursos afins e também para aqueles que apreciam Matemática.

Renato de Oliveira Caldas Madeira é engenheiro aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) da turma de 1997 e Mestre em Matemática Aplicada pelo Fundação Getúlio Vargas (FGV-RJ); participou de olimpíadas de Matemática no início da década de 90, tendo sido medalhista em competições nacionais e internacionais; trabalha com preparação em Matemática para concursos militares há 20 anos e é autor do blog "Madematica".

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos professores que me inspiraram a trilhar esse caminho e à minha família pelo apoio, especialmente, aos meus pais, Cézar e Sueli, pela dedicação e amor.
Gostaria ainda de dedicar esse livro à minha esposa Poliana pela ajuda, compreensão e amor durante toda a vida e, em particular, durante toda a elaboração dessa obra e a meus filhos Daniel e Davi que eu espero sejam futuros leitores deste livro.

Renato Madeira

Acompanhe o blog www.madematica.blogspot.com e fique sabendo do lançamento dos próximos volumes da coleção X-MAT!
Volumes já lançados:
Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2011-2015
Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2015
Livro X-MAT Volume 3 EFOMM 2009-2015
Livro X-MAT Volume 4 ESCOLA NAVAL 2010-2015
Livro X-MAT Volume 6 EsPCEx 2011-2016

CAPÍTULO 1 - ENUNCIADOS

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1989-1990

1) Num triângulo ABC traça-se a ceviana interna AD que o decompõe em dois triângulos semelhantes e não congruentes ABD e ACD. Conclui-se que tais condições:
(A) só são satisfeitas por triângulos acutângulos.
(B) só são satisfeitas por triângulos retângulos.
(C) só são satisfeitas por triângulos obtusângulos.
(D) podem ser satisfeitas, tanto por triângulos acutângulos tanto quanto por triângulos retângulos.
(E) podem ser satisfeitas, tanto por triângulos retângulos tanto quanto por triângulos obtusângulos.

2) Os números da forma $4^{k^2+50}+4^{k^2+51}+4^{k^2+52}+4^{k^2+53}$ são sempre múltiplos de:
(A) 17
(B) 19
(C) 23
(D) 29
(E) 31

3) O maior valor inteiro que verifica a inequação $x\cdot(x+1)\cdot(x-4)<2\cdot(x-4)$ é:
(A) 1.
(B) negativo.
(C) par positivo.
(D) ímpar maior que 4.
(E) primo.

4) Um aluno, ao tentar determinar as raízes x_1 e x_2 da equação $ax^2+bx+c=0$, $a\cdot b\cdot c\neq 0$, explicitou x da seguinte forma:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$$

Sabendo-se que não teve erro de contas, encontrou como resultado
(A) x_1 e x_2
(B) $-x_1$ e $-x_2$
(C) ${x_1}^{-1}$ e ${x_2}^{-1}$
(D) $c\cdot x_1$ e $c\cdot x_2$
(E) $a\cdot x_1$ e $a\cdot x_2$

5) O número de polígonos regulares de gênero par tais que, quaisquer duas de suas diagonais, que passam pelo seu centro, formam entre si ângulo expresso em graus por número inteiro, é:
(A) 17
(B) 18
(C) 21

(D) 23
(E) 24

6) Uma pessoa tomou um capital $\underline{C}$ a uma taxa mensal numericamente igual ao número de meses que levará para saldar o empréstimo. Tal pessoa aplica o capital $\underline{C}$ a uma taxa de 24% ao mês. Para que tenha um lucro máximo na operação, deverá fazer o empréstimo e a aplicação durante um número de meses igual a:
(A) 6
(B) 12
(C) 18
(D) 24
(E) 36

7) Sabe-se que a equação do 1º grau na variável x, $2mx - x + 5 = 3px - 2m + p$ admite as raízes $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$. Entre os parâmetros m e p vale a relação:
(A) $p^2 + m^2 = 25$
(B) $p \cdot m = 6$
(C) $m^p = 64$
(D) $p^m = 32$
(E) $\frac{p}{m} = \frac{3}{5}$

8) Se o $\text{m.d.c.}(a;b;c) = 100$ e o $\text{m.m.c.}(a;b;c) = 600$, podemos afirmar que o número de conjuntos de três elementos positivos e distintos $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ é:
a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

9) O cubo de $12_{(b)}$ é $1750_{(b)}$. A base de numeração b é:
(A) primo.
(B) ímpar e não primo.
(C) par menor que 5.
(D) par entre 5 e 17.
(E) par maior que 17.

10) No Colégio Naval, a turma do 1º Ano é distribuída em 5 salas. Num teste de Álgebra, as médias aritméticas das notas dos alunos, por sala, foram, respectivamente: $5,5$; $5,2$; $6,3$; $7,1$ e $5,9$. A média aritmética das notas da turma é:
(A) $5,9$
(B) $6,0$
(C) $6,15$
(D) $6,5$

(E) impossível calcular

11) Sejam $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 1200\}$ e $B = \{y \in A \mid y \text{ é primo com } 1200\}$. O número de elementos de B é:
(A) 270
(B) 300
(C) 320
(D) 360
(E) 420

12) O quadrilátero $ABCD$ está inscrito num círculo de raio unitário. Os lados AB, BC e CD são, respectivamente, os lados do triângulo equilátero, do quadrado e do pentágono regular inscrito no círculo. Se x é a medida do lado AD do quadrilátero, pode-se afirmar que:

Observação: $\overline{CD}$ é aproximadamente igual a $1,2$.

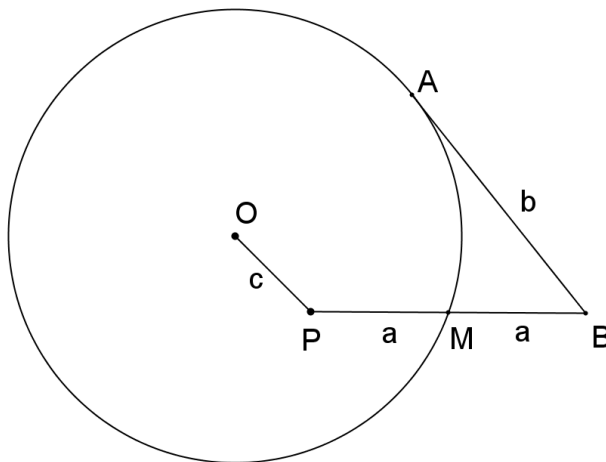
(A) $1,0 < x < 1,2$
(B) $1,2 < x < 1,4$
(C) $1,4 < x < 1,6$
(D) $1,6 < x < 1,8$
(E) $1,8 < x < 2,0$

13) Os lados do triângulo ABC medem $AB = 2$; $AC = 2\sqrt{3}$ e $BC = 4$. A área da interseção entre o círculo de centro B e raio $\overline{BA}$, o círculo de centro C e raio $\overline{CA}$ e o triângulo ABC é:
(A) $\frac{3\pi}{2} - 2\sqrt{3}$
(B) $\frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}$
(C) $\frac{5\pi}{4} - 2\sqrt{3}$
(D) $\frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3}$
(E) $\frac{6\pi}{5} - 2\sqrt{3}$

14) O denominador da fração irredutível, resultante da racionalização de

$$\frac{1}{6\sqrt{50 - 5\sqrt{75}} - \sqrt{128 - 16\sqrt{48}}},$$

é:
(A) 11
(B) 22
(C) 33
(D) 44
(E) 55

15) Na figura abaixo tem-se que O é o centro do círculo, P é um ponto qualquer do seu interior, $\text{Med}(\overline{PM}) = \text{Med}(\overline{MB}) = a$ e AB é tangente ao círculo em A. Se $a^2 = bc$, o raio do círculo é igual a:

(A) $|a + c - b|$

(B) $|2a + c - b|$

(C) $|a + b - c|$

(D) $|2a - c|$

(E) $|b - c|$

16) Um vendedor sempre coloca os seus produtos à venda com lucro de 70% sobre o preço de custo. Se o preço de custo de um certo produto aumentou de $R\$170,00$, o que corresponde a 20% do preço que tal produto era vendido, o novo preço de venda é:

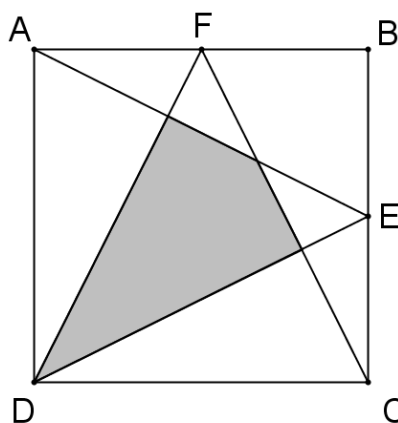
(A) $R\$ 850,00$

(B) $R\$1.020,00$

(C) $R\$1.139,00$

(D) $R\$1.224,00$

(E) $R\$1.445,00$

17) No quadrado ABCD de área S da figura acima, os pontos E e F são médios. A área da parte sombreada é:

(A) $\frac{2S}{15}$
(B) $\frac{S}{5}$
(C) $\frac{4S}{15}$
(D) $\frac{S}{3}$
(E) $\frac{2S}{5}$

18) No trinômio $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$, o seu valor numérico para $x = -3$ é positivo, para $x = 2$ é positivo e para $x = 7$ é negativo. Logo, pode-se afirmar que:
(A) $b > 0$
(B) $b < 0$
(C) $b = 0$ ou $c = 0$
(D) $c > 0$
(E) $c < 0$

19) Resolvendo-se o sistema $\begin{cases} \sqrt{x} \cdot y \cdot z = \frac{8}{3} \\ x \cdot \sqrt{y} \cdot z = \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ x \cdot y \cdot \sqrt{z} = \frac{16\sqrt{2}}{27} \end{cases}$, tem-se que $\frac{x + y + z}{x \cdot y \cdot z}$ é igual a:
(A) $\frac{21}{4}$
(B) $\frac{35}{8}$
(C) $\frac{35}{16}$
(D) $\frac{105}{16}$
(E) $\frac{105}{32}$

20) Numa divisão polinomial, o dividendo, o divisor, o quociente e o resto são, respectivamente: $4x^3 + ax^2 + 19x - 8$, $2x - b$, $2x^2 - 5x + 7$ e -1. A soma dos valores de a e b é igual a:
(A) -14
(B) -13
(C) -12
(D) -11
(E) -10

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1988-1989

1) As medianas traçadas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo medem $\sqrt{17}$ cm e $\sqrt{23}$ cm. A medida da mediana traçada do ângulo reto é:
(A) $5\sqrt{2}$ cm
(B) $4\sqrt{2}$ cm
(C) $3\sqrt{2}$ cm
(D) $2\sqrt{2}$ cm
(E) $\sqrt{2}$ cm

2) Os lados de um triângulo medem $\overline{AB}=40$, $\overline{AC}=50$ e $\overline{BC}=60$. Sendo D a interseção da bissetriz interna do ângulo B com o lado $\overline{AC}$, a área do triângulo ABD é:
(A) $225\sqrt{7}$
(B) $\frac{375}{2}\sqrt{7}$
(C) $150\sqrt{7}$
(D) $125\sqrt{7}$
(E) $75\sqrt{7}$

3) Considere as 4 afirmações abaixo. A seguir, coloque (V) ou (F) nos parênteses, conforme sejam verdadeiras ou falsas, e assinale a alternativa correta.
(1) - ( ) Em qualquer trapézio circunscrito a uma circunferência, a medida da base média é a quarta parte do seu perímetro.
(2) - ( ) As diagonais de um trapézio podem se intersectar no seu ponto médio.
(3) - ( ) Todo quadrilátero que tem as diagonais perpendiculares é um losango.
(4) - ( ) Existe quadrilátero plano cujos segmentos das diagonais não se intersectam.
(A) Apenas 2 é verdadeira.
(B) Apenas 3 é verdadeira.
(C) Apenas 3 e 4 são verdadeiras.
(D) 2, 3 e 4 são verdadeiras.
(E) 1 e 4 são verdadeiras.

4) Num grupo de rapazes e moças, 10 moças foram embora e o número de rapazes ficou igual ao número de moças. Após um certo tempo, 24 rapazes foram embora, e o número de moças ficou o quíntuplo do número de rapazes. Podemos afirmar que, inicialmente, havia no grupo
(A) 30 moças
(B) 40 moças
(C) 40 rapazes
(D) 50 rapazes
(E) 60 pessoas

5) Considere as sentenças dadas abaixo:

(I) $3^{5^0} = 1$

(II) $2^{3^{\sqrt{3}}} = 2^{3^{\frac{3}{2}}}$

(III) $-3^{-2} = \frac{1}{9}$

(IV) $81^{\frac{1}{2}} = \pm 9$

Pode-se afirmar que o número de sentenças verdadeiras é
(A) 4
(B) 3
(C) 2
(D) 1
(E) 0

6) Sobre o sistema $\begin{cases} x^{-2} + \sqrt[4]{y} = \frac{7}{6} \\ x^{-4} - \sqrt{y} = \frac{7}{36} \end{cases}$ pode-se afirmar que:
(A) é impossível.
(B) é indeterminado.
(C) $x = \frac{1}{2}$
(D) $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$
(E) $y = \frac{1}{16}$

7) As raízes da equação $2x^2 - x - 16 = 0$ são r e s $(r > s)$. O valor da expressão $\frac{r^4 - s^4}{r^3 + r^2 s + rs^2 + s^3}$ é
(A) $\frac{\sqrt{129}}{2}$
(B) $\frac{\sqrt{127}}{2}$
(C) $\frac{127}{4}$
(D) $\frac{129}{4}$
(E) impossível calcular.

8) Uma mercadoria que teve dois aumentos sucessivos de 30% e 20% deverá ter um único desconto de $x\%$ para voltar ao preço inicial. Logo
(A) $30 < x < 35$
(B) $35 < x < 40$
(C) $45 < x < 55$
(D) $55 < x < 65$
(E) $x > 65$

9) Cláudio comprou 10 dólares com 125 australes e Marta comprou 5 australes com 120 pesos chilenos. Assim João pode comprar:
(A) 3 dólares com 100 pesos chilenos.
(B) 3000 pesos chilenos com 10 dólares.
(C) 1200 pesos chilenos com 5 dólares.
(D) 800 pesos chilenos com 2 dólares.
(E) 50 dólares com 1000 pesos chilenos.

10) Se $a+b+c=0$, onde a, b e c são números reais diferentes de zero, qual a opção que é uma identidade?
(A) $a^3 - b^3 + c^3 = 3abc$
(B) $a^3 + b^3 + c^3 = -3abc$
(C) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
(D) $a^3 - b^3 - c^3 = -3abc$
(E) $a^2 + b^2 + c^2 = -2abc$

11) O valor da expressão $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+10}$ é:
(A) -10
(B) -9
(C) $\frac{1}{9}$
(D) 9
(E) 10

12) A solução da equação $\sqrt{2+\sqrt[3]{3x-1}} + \sqrt[3]{3x-1} = 4$ é:
(A) divisor de 30
(B) múltiplo de 5
(C) fator de 40
(D) múltiplo de 7
(E) divisível por 9

13) Considere as 5 afirmações abaixo. A seguir, coloque (V) ou (F) nos parênteses, conforme sejam verdadeiras ou falsas:

1. ( ) $2,4\text{ h} = 2\text{ h } 40\text{ min}$
2. ( ) $\frac{6}{5}\text{ km} = 1200\text{ dm}$
3. ( ) $0,2\text{ dm}^2 = 2\text{ m}^2$
4. ( ) $5\ \ell = 5000\text{ cm}^3$
5. ( ) $\sqrt[3]{0,008}\text{ m}^2 = 2000\text{ cm}^2$

Pode-se concluir que são verdadeiras apenas as afirmações:
(A) 1 e 4
(B) 3 e 4
(C) 2, 4 e 5
(D) 4 e 5
(E) 1 e 2

14) Num grupo de 142 pessoas foi feita uma pesquisa sobre três programas de televisão A, B e C e constatou-se que:
I - 40 não assistem a nenhum dos três programas.
II - 103 não assistem ao programa C.
III - 25 só assistem ao programa B.
IV - 13 assistem aos programas A e B.
V - O número de pessoas que assistem somente aos programas B e C é a metade dos que assistem somente a A e B.
VI - 25 só assistem a 2 programas; e
VII - 72 só assistem a um dos programas.
Pode-se concluir que o número de pessoas que assistem
(A) ao programa A é 30
(B) ao programa C é 39
(C) aos 3 programas é 6
(D) aos programas A e C é 13
(E) aos programas A ou B é 63.

15) Dado o sistema $\begin{cases} mx + ny = 2m + 3n \\ px + qy = 2p + 3q \end{cases}$ onde $m \cdot n \cdot p \cdot q \neq 0$,
(A) se $mq - np = 0$, então o sistema pode ser impossível.
(B) se $mq - np = 0$, então o sistema não é indeterminado.
(C) se $mq - np \neq 0$, então o sistema não é determinado.
(D) o sistema não é impossível.
(E) se $mq - np \neq 0$, então o sistema é impossível.

16) Sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC tomam-se os pontos D e E, respectivamente, de modo que os triângulos ABC e ADE sejam semelhantes.
Considere as 4 afirmações abaixo:

(I) $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$

(II) $\hat{B} = \hat{D}$ e $\hat{E} = \hat{C}$

(III) $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$

(IV) Se a razão entre as áreas dos triângulos ABC e ADE é 16, então a razão de semelhança é 4.

Pode-se concluir que o número de afirmações corretas é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

17) Considere as seguintes afirmações sobre o trinômio $y = -497x^2 + 1988x - 1987$:

(I) Seu valor máximo é 1.
(II) Tem duas raízes de mesmo sinal.
(III) Os valores numéricos para $x = -103$ e $x = 107$ são iguais.
(IV) O gráfico intersecta o eixo das ordenadas em -1987.

Pode-se concluir que o número de afirmações verdadeiras é:

(A) 4
(B) 3
(C) 2
(D) 1
(E) 0

18) Um polígono regular convexo de 18 vértices $A_1A_2A_3...A_{18}$ está inscrito em uma circunferência de raio R. Traçam-se as diagonais $\overline{A_1A_7}$ e $\overline{A_2A_5}$. A área da parte do círculo compreendida entre essas diagonais é:

(A) $\frac{R^2}{12}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$

(B) $\frac{\pi R^2}{3}$

(C) $R^2\left(\pi - \sqrt{3}\right)$

(D) $\frac{R^2}{12}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$

(E) $\frac{\pi R^2}{6}$

19) Considere as cordas $\overline{AP}=13$ e $\overline{BD}=12$ de uma circunferência, que se intersectam no ponto Q; e um ponto C no interior da corda $\overline{AP}$, tal que $ABCD$ seja um paralelogramo. Determinado este ponto C, $\overline{AC}$ mede
(A) 8
(B) 9
(C) 10
(D) 12
(E) 18

20) Um subconjunto do conjunto solução da inequação $\frac{1+4x-x^2}{x^2+1}>0$ é:
(A) $\{x\in\mathbb{R}\mid x>5\}$
(B) $\{x\in\mathbb{R}\mid x<2\}$
(C) $\{x\in\mathbb{R}\mid x<0\}$
(D) $\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<4\}$
(E) $\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x<3\}$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1987/1988

1) Sendo a e b números inteiros quaisquer, $R = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, b \neq 0 \right\}$ e $S = \{2; 1,3; 0,444\ldots; \sqrt{2}\}$ então:

(A) $S \subset R$.
(B) $S \cap R = \varnothing$.
(C) $S \cap R$ é unitário.
(D) $S \cap R$ tem dois elementos.
(E) $S - R$ é unitário.

2) a e b são números reais diferentes de zero e $a - b > 0$, então, necessariamente

(A) $a^2 > b^2$
(B) $\frac{a}{b} > 1$
(C) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$
(D) $a - 2 < b - 2$
(E) $1 - a < 1 - b$

3) A soma dos algarismos na base 10 de $\left(10^{n^3} + 3\right)^2$, onde n é um número inteiro positivo é:

(A) 16
(B) 13
(C) 13n
(D) $n^3 + 3n$
(E) $n^6 + 2n^3 + 1$

4) Dois capitais são empregados a uma mesma taxa de 3% ao ano. A soma dos capitais é igual a R\$ 50.000,00. Cada capital produz R\$ 600,00 de juros. O primeiro permaneceu empregado 4 meses a mais que o segundo. O segundo capital foi empregado durante

(A) 6 meses.
(B) 8 meses.
(C) 10 meses.
(D) 2 anos.
(E) 3 anos.

5) Dados os conjuntos M, N e P tais que $N \subset M$, $n(M \cap N) = 60\% \cdot n(M)$, $n(N \cap P) = 50\% \cdot n(N)$, $n(M \cap N \cap P) = 40\% \cdot n(P)$ e $n(P) = x\% \cdot n(M)$. O valor de x é:

OBS.: $n(A)$ indica o número de elementos do conjunto A.

(A) 80
(B) 75
(C) 60
(D) 50
(E) 45

6) O denominador racionalizado de $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}+1}$ é:

(A) 10
(B) 8
(C) 4
(D) 3
(E) 2

7) Simplificando-se a expressão $\frac{(6\times12\times18\times\cdots\times300)}{(2\times6\times10\times14\times\cdots\times98)\times(4\times8\times12\times16\times\cdots\times100)}$ obtém-se:

(A) 3^{50}
(B) $\frac{3}{2}$
(C) $\left(\frac{3}{2}\right)^{25}$
(D) $\frac{3}{4}$
(E) 2^{25}

8) O conjunto dos valores de m para os quais as equações $3x^2-8x+2m=0$ e $2x^2-5x+m=0$ possuem uma e apenas uma raiz real comum é
(A) unitário, de elemento positivo.
(B) unitário, de elemento não negativo.
(C) composto de dois elementos não positivos.
(D) composto de dois elementos não negativos.
(E) vazio.

9) O sistema $\begin{cases} x^2-\sqrt{5}y=8000 \\ 0,001x-y=5000 \end{cases}$:

(A) tem apenas uma solução (x,y), $x<0$ e $y<0$.
(B) tem apenas uma solução (x,y), $x>0$ e $y<0$.
(C) tem apenas uma solução (x,y), $x<0$ e $y>0$.
(D) tem duas soluções.
(E) não tem soluções.

10) Num sistema S de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, x e y, os coeficientes de x e y de uma das equações são, respectivamente, proporcionais aos coeficientes de x e de y da outra. Logo, o conjunto solução de S:
(A) é unitário.
(B) é infinito.
(C) é vazio.
(D) pode ser vazio.
(E) pode ser unitário.

11) A equação do 2º grau $x^2 - 2x + m = 0$, $m < 0$, tem raízes x_1 e x_2. Se $x_1^{n-2} + x_2^{n-2} = a$ e $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} = b$, então $x_1^n + x_2^n$ é igual a:
(A) $2a + mb$
(B) $2b - ma$
(C) $ma + 2b$
(D) $ma - 2b$
(E) $m(a - 2b)$

12) No processo da divisão do polinômio $P(x)$, de coeficientes não nulos, pelo polinômio $g(x)$, obteve-se, para quociente um polinômio do 4º grau e, para penúltimo resto, um polinômio do 2º grau. Considerando-se as afirmativas:
I) O grau de $P(x)$ é 6.
II) O grau de $g(x)$ pode ser 1.
III) $P(x)$ é composto de 7 monômios.
Conclui-se que:
(A) apenas I é verdadeira.
(B) apenas III é falsa.
(C) apenas II é verdadeira.
(D) apenas I e III são verdadeiras.
(E) todas são falsas.

13) Considere os números reais $x - a$, $x - b$ e $x - c$; onde a, b e c são constantes. Qual o valor de x para que a soma de seus quadrados seja a menor possível?
(A) $\frac{a+b+c}{2}$
(B) $\frac{a+b+c}{3}$
(C) $\frac{2a+2b+2c}{3}$
(D) $\frac{a-b-c}{3}$
(E) $\frac{2a-2b+2c}{3}$

14) Simplificando a expressão $\sqrt{1+\left(\frac{x^4-1}{2x^2}\right)^2} - \frac{x^2}{2}$, para $x \in \mathbb{R}^*$, obtém-se:
(A) $\frac{1}{2x^2}$
(B) $\frac{x^4+x^2-1}{2x^2}$

(C) $\frac{x^4 - x^2 - 1}{2x^2}$

(D) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$

(E) $\frac{x^2}{\sqrt{2}}$

15) Considere o quadrilátero ABCD onde $\text{med}(\overline{AB}) = 5\text{ cm}$, $\text{med}(\overline{BC}) = 7,5\text{ cm}$, $\text{med}(\overline{CD}) = 9\text{ cm}$, $\text{med}(\overline{AD}) = 4\text{ cm}$ e $\text{med}(\overline{BD}) = 6\text{ cm}$. O ângulo $A\hat{B}C$ deste quadrilátero é igual a:

(A) $B\hat{C}D + \frac{A\hat{D}C}{2}$

(B) $B\hat{A}D + A\hat{D}C - B\hat{C}D$

(C) $B\hat{A}D + B\hat{C}D$

(D) $2 \cdot B\hat{C}D + A\hat{D}C$

(E) $A\hat{D}C + 2 \cdot B\hat{A}C - B\hat{C}D$

16) O vértice E de um triângulo equilátero ABE está no interior de um quadrado $ABCD$ e F é o ponto de interseção da diagonal $\overline{BD}$ e o lado $\overline{AE}$. Se a medida de $\overline{AB}$ é igual a $\sqrt{1+\sqrt{3}}$, então a área do triângulo BEF é:

(A) $\sqrt{3} - \frac{3}{4}$

(B) $1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$

(C) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

(E) $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$

17) Por um ponto P exterior a um círculo de centro O e raio $R = 1\text{ cm}$, traça-se uma secante que intersecta a circunferência do círculo dado nos pontos A e B, nesta ordem. Traça-se pelo ponto A uma paralela à reta $\overleftrightarrow{PO}$ que intersecta a mesma circunferência no ponto C. Sabendo que o ângulo $O\hat{P}A$ mede 15°, o comprimento do menor arco BC, em centímetros, é:

(A) $\frac{\pi}{12}$

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{3}$
(E) $\frac{5\pi}{12}$

18) Um polígono regular tem vinte diagonais. A medida, em graus, de um de seus ângulos internos é:
(A) 201º
(B) 167º
(C) 162º
(D) 150º
(E) 135º

19) Um triângulo retângulo de perímetro $2p$ está inscrito num círculo de raio R e circunscrito a um círculo de raio r. Uma expressão que dá a altura relativa à hipotenusa do triângulo é:
(A) $\frac{pr}{R}$
(B) $\frac{p+r}{R}$
(C) $\frac{R}{pr}$
(D) $\frac{R}{p+r}$
(E) $\frac{2pr}{R}$

20) Uma expressão que dá o lado do eneágono regular, em função das diagonais a, b e c, com $a<b<c$, é:
(A) $\frac{c^2+b^2}{a}$
(B) $\frac{cb}{a}$
(C) $\frac{c^2-b^2}{a}$
(D) $\frac{(c+b)^2}{a}$
(E) $\frac{(c-b)^2}{a}$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1986/1987

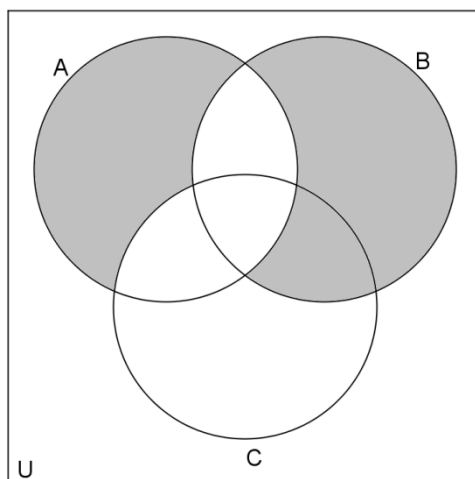
1) Considere três números naturais x, y e z, tais que $x < y < z$. Sabe-se que o maior é a soma dos outros dois e que o menor é um quinto do maior. Então x, y e z são, nesta ordem, diretamente proporcionais a:
(A) $1,\ 2,\ 3$
(B) $1,\ 4,\ 5$
(C) $1,\ 3,\ 5$
(D) $1,\ 4,\ 6$
(E) $2,\ 5,\ 6$

2) O número $583ab$ é divisível por 9. O valor máximo da soma dos algarismos a e b, é:
(A) indeterminado.
(B) 20
(C) 18
(D) 11
(E) 2

3) Um minério A tem massa igual a 5 kg e contém 72% de ferro, e um minério B de massa m, contém 58% de ferro. A mistura dessas massas contém 62% de ferro. A massa m, em kg, é:
(A) 10
(B) $10,5$
(C) $12,5$
(D) $15,5$
(E) $18,5$

4) O número 12 é o máximo divisor comum entre os números 360, a e b tomados dois a dois. Sabendo que $100 < a < 200$, e que $100 < b < 200$, pode-se afirmar que $a + b$ vale:
(A) 204
(B) 228
(C) 288
(D) 302
(E) 372

5) O valor de $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$ é:
(A) 1
(B) $\sqrt{2}$
(C) 2
(D) $2\sqrt{2}$
(E) $3\sqrt{2}$

6) Considere os conjuntos A, B, C e U no diagrama abaixo. A região sombreada corresponde ao conjunto:

(A) $[A-(B\cap C)]\cup[(B\cap C)-A]$

(B) $C_{(A\cup B\cup C)}[(A\cup B)-C]$

(C) $C_{A\cup(B\cap C)}[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$

(D) $(A\cup B)-[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$

(E) $[(B\cap C)-A]\cup(A-B)$

7) A representação decimal do número $\left(2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\right)^{-1}$ sendo $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ números naturais, é uma dízima periódica composta. Sendo assim, pode-se afirmar que, necessariamente:

(A) $a=0,\ b\neq 0$ e $c\neq 0$.

(B) $a\neq 0,\ b\neq 0$ e $c=0$.

(C) $a\neq 0,\ b=0$ e $c\neq 0$.

(D) $a\neq 0$ ou $c\neq 0$ e $b\neq 0$.

(E) $a\neq 0,\ b\neq 0$ e $c\neq 0$.

8) Sejam os conjuntos

$A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{x-3}{x+5}\geq 0\right\}$

$B=\left\{x\in\mathbb{R}\mid (x-3)(x+5)\geq 0\right\}$

$C=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x-3\geq 0 \text{ e } x+5\geq 0\right\}$

Pode-se afirmar que:

(A) $A=B=C$

(B) $A\subset B\subset C$

(C) $A\subset C\subset B$

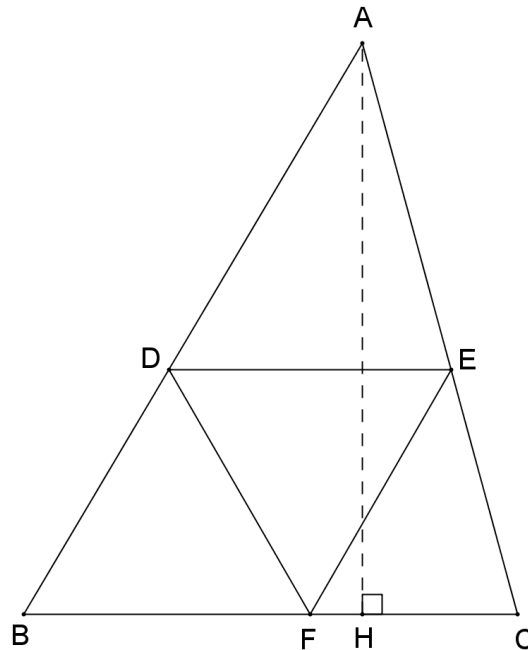
(D) $C\subset A\subset B$

(E) $C\subset A=B$

9) Os ponteiros das horas, dos minutos e dos segundos de um relógio indicam zero hora. Até as 9 horas do mesmo dia, os ponteiros dos minutos e dos segundos terão se encontrado um número de vezes igual a:
(A) 524
(B) 531
(C) 540
(D) 573
(E) 590

10) Considere um losango de lado L e área S. A área do quadrado inscrito no losango, em função de L e S é:
(A) $\frac{4S^2}{L^2 + 2S}$
(B) $\frac{16S^2}{4L^2 + S}$
(C) $\frac{S^2}{L^2 + S}$
(D) $\frac{4S^2}{4L^2 + S}$
(E) $\frac{S^2}{L^2 + 2S}$

11) O total de polígonos convexos cujo número n de lados é expresso por dois algarismos iguais e tais que seu número d de diagonais é tal que $d > 26n$ é:
(A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7
(E) 8

12) No triângulo ABC, tem-se $\overline{BC} = a$ e a altura $\overline{AH} = h$. O lado do triângulo equilátero DEF inscrito em ABC tal que DE é paralelo a BC, é dado pela expressão:

(A) $\dfrac{2ah}{a\sqrt{3}+2h}$

(B) $\dfrac{ah}{a\sqrt{3}+h}$

(C) $\dfrac{2h}{h\sqrt{3}+a}$

(D) $\dfrac{2a}{a\sqrt{3}+h}$

(E) $\dfrac{2ah}{2a\sqrt{3}+h}$

13) Qual a solução do sistema abaixo?

$$\begin{cases} \sqrt{\sqrt{x}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{x}-2} - 5\sqrt[4]{x-4} + 6 < 0 \\ 1500x^{-1} + x > 80 \end{cases}$$

(A) $x > 85$
(B) $30 < x < 50$
(C) $20 < x < 85$
(D) $20 < x < 50$ ou $x > 85$
(E) $20 < x < 30$ ou $50 < x < 85$

14) Sobre o polinômio $P(x)=ax^b-3$ sabe-se que $P(2)=17$ e $P(4)=77$. O número de divisores inteiros do número $N=(a+1)^3\cdot b^5$ é:
(A) 24
(B) 36
(C) 48
(D) 72
(E) 108

15) Num triângulo retângulo, se diminuirmos cada um dos catetos em 4 cm, a área diminuirá de 506 cm^2. A soma dos catetos, em cm, vale:
(A) 182
(B) 248
(C) 250
(D) 257
(E) 260

16) Qual o valor da expressão abaixo:

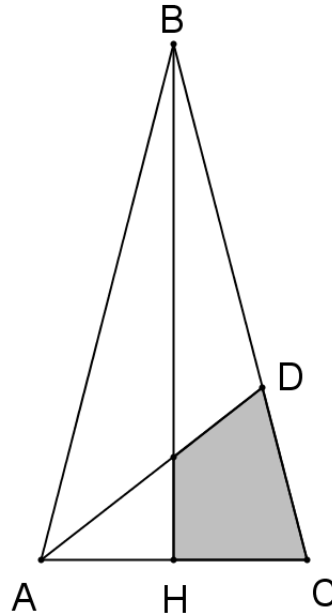
$$\left(\frac{1+2+3+\cdots+50}{5+10+15+\cdots+250}\right)^{-1/2}\left(\sqrt[3]{2\sqrt{1,25}}\right)^{-1}$$

(A) 1
(B) $\sqrt{5}$
(C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
(D) $\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$
(E) $\sqrt[3]{5}$

17) Simplificando a expressão $\frac{(a^2-b^2-c^2-2bc)\cdot(a+b-c)}{(a+b+c)\cdot(a^2+c^2-2ac-b^2)}$ para os valores de a, b, c que não anulam o denominador, obtêm-se:
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) $a+b+c$
(E) $a-b+c$

18) De um ponto fora de um círculo de 60 cm de raio traçam-se duas tangentes. Os pontos de tangência determinam na circunferência um arco de 10π cm. O ângulo formado pelas duas tangentes vale:
(A) 30°
(B) 120°
(C) 145°
(D) 150°

(E) 330°

19) O triângulo ABC da figura abaixo tem área S. Sabendo que $\overline{AB} = \overline{BC} = 2\overline{AC}$, $\overline{BH}$ é altura e $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo $\hat{A}$, a área da região hachurada, em função de S é igual a:

(A) $\frac{2S}{15}$

(B) $\frac{S}{10}$

(C) $\frac{S}{18}$

(D) $\frac{7S}{30}$

(E) $\frac{S}{21}$

20) As raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são iguais a m e n. Assinale a equação cujas raízes são m^3 e n^3.

(A) $a^3x^2 - b\left(3ac + b^2\right)x + c^3 = 0$

(B) $ax^2 - b\left(3ac - b^2\right)x + c = 0$

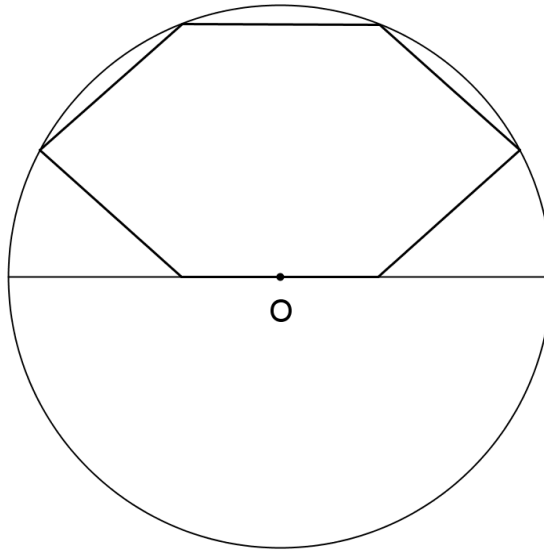
(C) $a^3x^2 + b\left(b^2 - 3ac\right)x + c = 0$

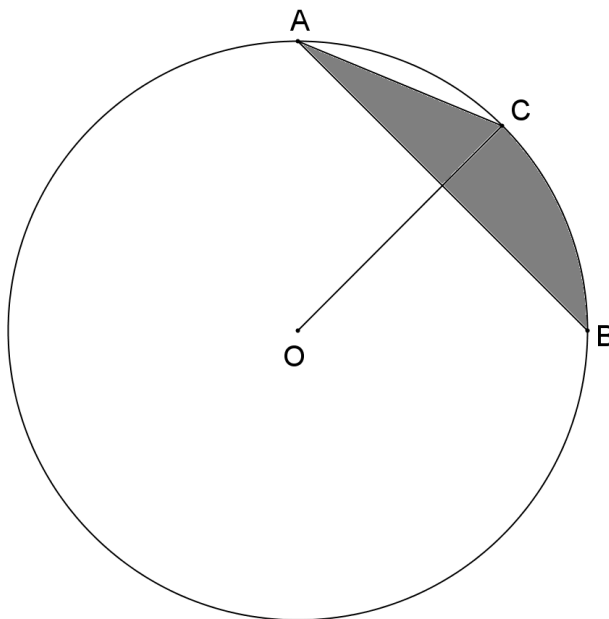
(D) $a^3x^2 + b\left(b^2 - 3ac\right)x - c^3 = 0$

(E) $a^3x^2 + b\left(b^2 - 3ac\right)x + c^3 = 0$

21) Para que o trinômio $y = ax^2 + bx + c$ admita um valor máximo e tenha raízes de sinais contrários, deve-se ter:

(A) $a < 0$, $c > 0$ e b qualquer
(B) $a < 0$, $c < 0$ e $b = 0$
(C) $a > 0$, $c < 0$ e b qualquer
(D) $a > 0$, $c < 0$ e $b = 0$
(E) $a < 0$, $c < 0$ e b qualquer

22) O lado do hexágono equilátero inscrito numa semicircunferência do círculo de raio r e centro O, onde uma de suas bases está sobre o diâmetro, é:

(A) $\frac{r}{2}$
(B) $\frac{r\sqrt{2}}{2}$
(C) $\frac{r\sqrt{3}}{2}$
(D) r
(E) $\frac{2r}{3}$

23) Na figura abaixo, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são, respectivamente, os lados do quadrado e do octógono regular inscritos no círculo de centro O e raio r. A área sombreada é dada por:

(A) $\frac{r^2}{8}\left(\pi+4-2\sqrt{2}\right)$

(B) $\frac{r^2}{8}\left(\pi+4+2\sqrt{2}\right)$

(C) $\frac{r^2}{8}\left(4-\pi+\sqrt{2}\right)$

(D) $\frac{r^2}{8}\left(4+2\sqrt{2}-\pi\right)$

(E) $\frac{r^2}{8}\left(\pi-4+2\sqrt{2}\right)$

24) Considere as sentenças abaixo.

I) $4^{8^3}=2^{1024}$

II) $\sqrt[4]{64}=\sqrt[6]{512}<\sqrt[3]{128}$

III) $\sqrt{25}+\sqrt{56}=9$

IV) $\sqrt{A^4+B^4}=A^2+B^2$, para todo A e B reais

Pode-se concluir que:

(A) Todas são verdadeiras.
(B) (III) é a única falsa.
(C) Somente (I) e (II) são verdadeiras.
(D) (IV) é a única falsa.
(E) Existe somente uma sentença verdadeira.

25) A divisão do polinômio $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ pelo polinômio $D(x) = 2x^2 - 3x + 1$ apresenta quociente $Q(x)$ e resto $R(x)$. Assinale a alternativa falsa:

(A) $R(1) = 3$.

(B) $R(x) > 0$ para $x > \frac{1}{9}$.

(C) O menor valor de $Q(x)$ ocorre para $x = -\frac{3}{4}$.

(D) A média geométrica dos zeros de $Q(x)$ é $\frac{\sqrt{22}}{4}$.

(E) O valor mínimo de $Q(x)$ é $\frac{35}{32}$.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1985/1986

1) Representando-se por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto X, considere dois conjuntos A e B tais que $n(A \cap B) = 4$, $n(A - B) = 5$ e $n(A \times B) = 36$. Podemos afirmar que $n(A \cup B)$ é igual a:
(A) 4
(B) 6
(C) 7
(D) 9
(E) 10

2) Considere os conjuntos $X = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 4\}$ e Y, $Y \subset X$. O número de conjuntos Y tais que $4 \in Y$ e $0 \notin Y$ é:
(A) 6
(B) 7
(C) 8
(D) 15
(E) 16

3) A média harmônica entre as raízes da equação $340x^2 - 13x - 91 = 0$ é:
(A) 7
(B) -7
(C) $\frac{340}{7}$
(D) $\frac{1}{7}$
(E) -14

4) O número máximo de divisores positivos do número natural: $48 \cdot 2^{-x^2+2x}$, $x \in \mathbb{N}$ é:
(A) 12
(B) 10
(C) 24
(D) 15
(E) 16

5) O valor de x no sistema $\begin{cases} 16x - y & = & 1 \\ \sqrt{x+2} - \sqrt[4]{y+33} & = & 1 \end{cases}$ é:
(A) $15 + 14\sqrt{2}$
(B) $15 + 12\sqrt{2}$
(C) $15 + 10\sqrt{2}$
(D) $15 + 8\sqrt{2}$
(E) $15 + 6\sqrt{2}$

6) Uma mercadoria foi comprada por $R\$\ 20,00$. Para que haja um lucro de 60% sobre o preço de venda, esta mercadoria deve ser vendida por:
(A) $R\$\ 32,00$
(B) $R\$\ 50,00$
(C) $R\$\ 48,00$
(D) $R\$\ 45,00$
(E) $R\$\ 58,00$

7) O valor da expressão $E = 9a^3 - 3a$, para $a = \left(0,2666... + \frac{5^{-1} \cdot \left(3^3 + 3^2 \cdot (-2)^3\right)}{(0,333...)^{-3} \cdot (-5)}\right)^{\frac{1}{2}}$ é:
(A) $\sqrt{3}$
(B) $\sqrt{2}$
(C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
(D) 0
(E) 1

8) O resto da divisão de $(x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 9x - 8)$ por $(x^2 + x - 3)$ é:
(A) independente de x e não nulo.
(B) positivo para $x < \frac{5}{2}$.
(C) nulo.
(D) par, para $x \in \mathbb{N}$.
(E) igual a 21, para $x = 13$.

9) O número $\sqrt{1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}}$ está situado entre
(A) 1 e $1,5$
(B) $1,5$ e 2
(C) 2 e $2,5$
(D) 2,5 e 3
(E) $3,5$ e 4

10) Sendo P e Q dois polinômios de mesma variável e de graus respectivamente iguais a m e n, e sendo $m \leq n$, podemos afirmar que:
(A) a soma de P e Q é de grau $m + n$.
(B) o produto de P por Q é de grau $m \cdot n$.
(C) a soma de P e Q é de grau m.
(D) o quociente entre de P e Q, caso exista, é de grau $m - n$.
(E) a diferença entre P e Q é de grau n.

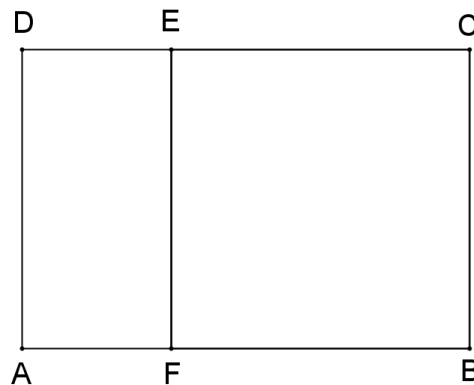
11) Duas pessoas constituíram uma sociedade: a primeira entrou com um capital de R$ 5.000,00 e a segunda com R$ 6.000,00. Um ano depois, admitiram um terceiro sócio, que entrou com um capital de R$10.000,00. Decorridos 18 meses desde o início da sociedade, a firma teve um lucro de R$12.900,00. A parte do lucro que caberá ao terceiro sócio é:
(A) R$1.000,00
(B) R$ 2.000,00
(C) R$ 3.000,00
(D) R$ 4.000,00
(E) R$ 5.000,00

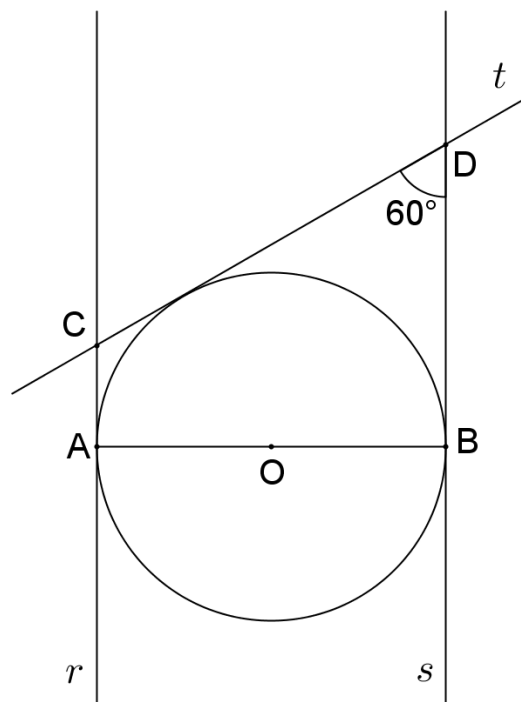
12) O sistema $\begin{cases} y \geq x+2 \\ y \leq x-2 \end{cases}$
(A) não tem solução.
(B) tem solução contida no 4º quadrante.
(C) tem solução que contem o 2º quadrante.
(D) é satisfeito por apenas um ponto do plano cartesiano.
(E) tem solução apenas para $y \geq 2$.

13) Um vendedor de refresco acondiciona o seu produto numa caixa de isopor com as seguintes dimensões internas: $1\text{ m} \times 60\text{ cm} \times 40\text{cm}$. Cada copo de refresco de 300 ml é vendido por R$0,40. Nestas condições, ao término de um dia de trabalho, pela venda de uma quantidade de refresco correspondente a $\frac{3}{4}$ da capacidade da caixa, o vendedor apurou:
(A) R$ 360,00
(B) R$ 300,00
(C) R$ 270,00
(D) R$ 330,00
(E) R$ 240,00

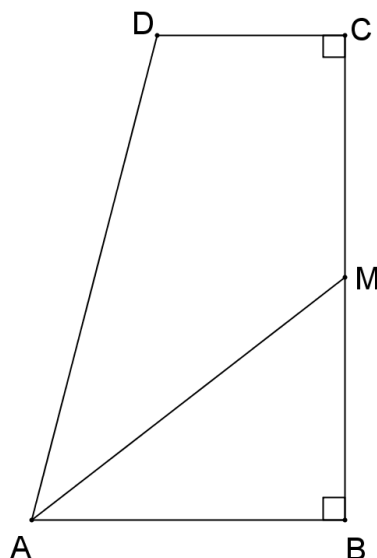
14) O maior divisor comum dos polinômios x^4-16, $x^3-6x^2+12x-8$ e x^4-8x^2+16 é:
(A) $x+2$
(B) $x+4$
(C) $x-2$
(D) $x-4$
(E) 1

15) Uma equação biquadrada tem duas raízes respectivamente iguais a $\sqrt{2}$ e 3. O valor do coeficiente do termo de 2º grau dessa equação é:
(A) 7
(B) -7
(C) 11
(D) -11
(E) 1

16) O retângulo $ABCD$ da figura abaixo tem base igual a $x+y$. O segmento $\overline{AF}$ tem medida z. Sabe-se que $x^2+y^2+z^2=3,54$ e que $xz+yz-xy=0,62$. A área do quadrado $FBCE$ é

(A) 2
(B) 2,1
(C) 2,3
(D) 2,7
(E) 2,5

17) Na figura abaixo, as retas r, s e t são tangentes à circunferência de diâmetro $\overline{AB}$. O segmento $\overline{AC}$ mede 4 cm. A medida, em centímetros, do segmento $\overline{CD}$ é:

(A) 16
(B) 14
(C) 12
(D) 8
(E) 20

18) O número de triângulos de perímetro igual a 19, uma das alturas igual a 4, inscritíveis num círculo de raio 5, e cujos lados têm medidas expressas por números inteiros é:
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

19) O trapézio ABCD da figura é retângulo de bases AB de medida 10 e CD de medida 6. A bissetriz do ângulo Â intercepta BC no seu ponto médio M. A altura do trapézio é igual a:

(A) $2\sqrt{15}$
(B) $8\sqrt{15}$
(C) $6\sqrt{15}$
(D) $4\sqrt{15}$
(E) $5\sqrt{15}$

20) As bases de um trapézio medem 3 cm e 9 cm. Os segmentos determinados pelas diagonais do trapézio sobre a base média são proporcionais aos números:
(A) $1,\ 1,\ 1$
(B) $1,\ 2,\ 1$
(C) $1,\ 3,\ 1$
(D) $1,\ 4,\ 1$
(E) $2,\ 3,\ 4$

21) O intervalo solução da inequação $(x+3)(x+2)(x-3)>(x+2)(x-1)(x+4)$ é:

(A) $\left(-\infty,\ -\frac{5}{3}\right)$

(B) $(-\infty,\ -1)$

(C) $\left(-2,\ -\frac{5}{3}\right)$

(D) $\left(-\frac{5}{3},\ +\infty\right)$

(E) $(-1,\ 2)$

22) Em um triângulo os lados de medidas m e n são opostos, respectivamente, aos ângulos de 60° e 40°. O segmento da bissetriz do maior ângulo interno do triângulo é dado por:

(A) $m \cdot \sqrt{\frac{m+n}{n}}$

(B) $n \cdot \sqrt{\frac{m+n}{m}}$

(C) $m \cdot \sqrt{\frac{n}{m+n}}$

(D) $n \cdot \sqrt{\frac{m}{m+n}}$

(E) $\sqrt{\frac{m}{n}}$

23) Considere um ponto P interno a um hexágono regular de lado igual a 6 cm. A soma das distâncias de P a cada uma das retas suportes dos lados deste hexágono

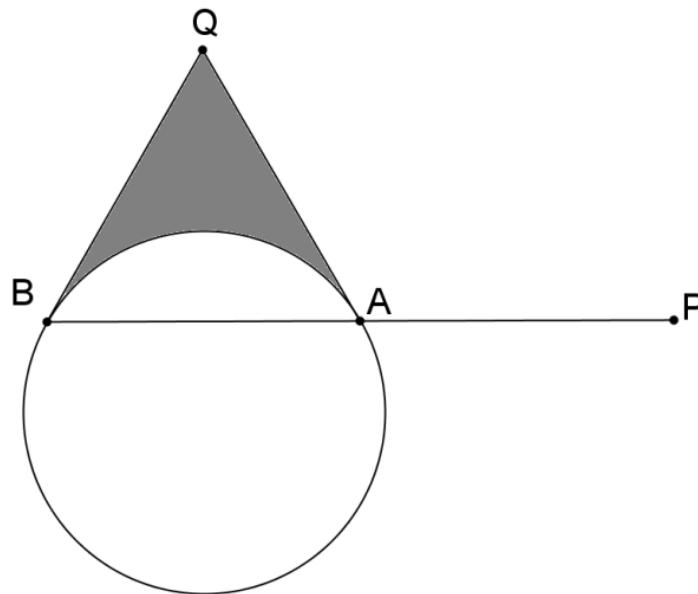
(A) depende da localização de P.

(B) é igual a 36 cm.

(C) é igual a 18 cm.

(D) é igual a $12\sqrt{3}\text{ cm}$.

(E) é igual a $18\sqrt{3}\text{ cm}$.

24) Na figura abaixo, tem-se: $\overleftrightarrow{QB}$ e $\overleftrightarrow{QA}$ são tangentes ao círculo de raio 2; a medida do segmento $\overline{PA}$ é $2\sqrt{3}$ e a potência do ponto P em relação ao círculo é igual a 24. A área sombreada da figura é igual a

(A) $\frac{4}{3}(2\sqrt{3}-\pi)$
(B) $\frac{4}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$
(C) $\frac{4}{3}(\sqrt{3}-\pi)$
(D) $\frac{4}{3}(4\sqrt{3}-\pi)$
(E) $\frac{4}{3}(6\sqrt{3}-\pi)$

25) Num triângulo ABC de lado $\overline{AC}=12$, a reta $\overleftrightarrow{AD}$ divide internamente o lado $\overline{BC}$ em dois segmentos: $\overline{BD}=18$ e $\overline{DC}=6$. Se $A\hat{B}D=x$ e $A\hat{C}D=y$, o ângulo $B\hat{D}A$ é dado por:
(A) $y-x$
(B) $x+y$
(C) $2x-y$
(D) $2y-x$
(E) $2x+y$

CAPÍTULO 2
RESPOSTAS E CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 1989/1990

1) b (Triângulos – semelhança e relações métricas)
2) a (Potências e raízes)
3) e (Inequações produto quociente)
4) c (Equação do 2° grau)
5) a (Polígonos – ângulos e diagonais)
6) b (Juros simples e compostos)
7) a (Equação do 1° grau e problemas do 1º grau)
8) b (MDC e MMC)
9) d (Sistemas de numeração)
10) e (Médias)
11) c (Múltiplos e divisores)
12) b (Polígonos – relações métricas)
13) d (Áreas)
14) b (Racionalização e radical duplo)
15) e (Potência de ponto)
16) c (Operações com mercadorias)
17) c (Áreas)
18) d (Função quadrática)
19) e (Sistemas não lineares e problemas relacionados)
20) d (Polinômios)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 1988/1989

1) d (Triângulos retângulos)
2) c (Áreas)
3) e (Quadriláteros)
4) b (Sistemas lineares e problemas relacionados)
5) e (Potências e raízes)
6) e (Sistemas não lineares e problemas relacionados)
7) a (Equação do 2° grau)
8) a (Operações com mercadorias)
9) b (Razões e proporções)
10) c (Produtos notáveis e fatoração)
11) d (Racionalização e radical duplo)
12) a (Equações e inequações irracionais)
13) d (Sistema métrico)
14) b (Conjuntos)
15) d (Sistemas lineares e problemas relacionados)
16) b (Semelhança de triângulos)
17) a (Função quadrática)

18) e (Áreas)
19) a (Potência de ponto)
20) d (Inequações produto-quociente)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 1987/1988

1) e (Conjuntos numéricos)
2) e (Conjuntos numéricos)
3) a (Sistemas de numeração)
4) b (Juros simples)
5) b (Conjuntos)
6) c (Racionalização)
7) a (Potências e raízes)
8) d (Equação do 2° grau)
9) e (Sistemas não lineares)
10) d (Sistemas lineares)
11) b (Equação do 2° grau – relações entre coeficientes e raízes)
12) c (Polinômios)
13) b (Função quadrática)
14) a (Produtos notáveis e fatoração)
15) c (Semelhança de triângulos)
16) e (Áreas)
17) b (Ângulos na circunferência)
18) e (Polígonos – angular)
19) a (Áreas)
20) c (Relações métricas nos quadriláteros)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 1986/1987

1) b (Razões e proporções)
2) d (Divisibilidade)
3) c (Misturas)
4) c (MDC)
5) c (Racionalização)
6) d (Conjuntos)
7) d (Números racionais)
8) d (Inequações produto-quociente)
9) b (Contagem)
10) c (Áreas)
11) a (Polígonos)
12) a (Semelhança de triângulos)
13) e (Inequações produto-quociente)
14) d (Polinômios)
15) d (Áreas)
16) e (Potências e raízes)
17) a (Produtos notáveis e fatoração)
18) d (Ângulos na circunferência)

19) d (Áreas)
20) e (Equação do 2° grau – relações entre coeficientes e raízes)
21) a (Função quadrática)
22) b (Semelhança de triângulos)
23) e (Áreas)
24) c (Potências e raízes)
25) d (Polinômios)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 1985/1986

1) d (Conjuntos)
2) c (Conjuntos)
3) e (Equação do 2° grau)
4) a (Múltiplos e divisores)
5) b (Sistemas não lineares)
6) b (Operações com mercadorias)
7) d (Potências e raízes)
8) e (Polinômios)
9) c (Racionalização e radical duplo)
10) d (Polinômios)
11) c (Regra de sociedade)
12) a (Função do 1° grau)
13) e (Sistema métrico)
14) c (Polinômios)
15) d (Equação biquadrada)
16) c (Produtos notáveis)
17) a (Circunferência – segmentos tangentes)
18) a (Triângulos – angular)
19) d (Quadriláteros – trapézio)
20) b (Quadriláteros – trapézio)
21) c (Inequação produto – quociente)
22) c (Semelhança de triângulos)
23) e (Polígonos – relações métricas)
24) b (Áreas de regiões circulares)
25) b (Semelhança de triângulos)

QUADRO RESUMO DAS QUESTÕES DE 1984 A 2016

ASSUNTO	F8	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	TOTAL	PERCENTUAL
Raciocínio lógico									1		1							2	1														1	6	0,9%
Conjuntos		1	2	2	1	1	1		1	1		1			2	1		1					1	1	1			1	1		1		1	22	3,3%
Operações com números naturais e inteiros	1								1	1			1									1				1	1			2				8	1,2%
Números racionais	1				1					1		1	2	1	1		1				1									2	1	2		14	2,1%
Conjuntos numéricos e números reais						2					1					2									1				1					7	1,1%
Sistemas de numeração	1					1		1		1				1			1			1					1		2			1			2	12	1,8%
Múltiplos e divisores	2	1		1				1	1	1			1						2		1	1		2		1	1	1	1	2	3		2	23	3,5%
Divisibilidade e congruência		1			1						1		1					1			1	2					2	1	3	1		1		16	2,4%
Função parte inteira																												1						1	0,2%
MDC/MMC	1				1			1			1							1	2	1	1		2		1	2				1		1		15	2,3%
Razões e proporções		2			1		1		1				2		2		1	1		1	1		1		2		1					1		18	2,7%
Regra de três	3												1																				1	2	0,3%
Porcentagem			1							1		1		1			1	1			1			1		2								10	1,5%
Divisão em partes proporcionais e regra de sociedade			1	1																		1		1	1									5	0,8%
Operações com mercadorias				1			1	1			1		1	1	1			1		1			1					1						11	1,7%
Juros simples e compostos						1		1	1		1	1				1							1		1									8	1,2%
Misturas	1				1											1			1								1			1				5	0,8%
Médias		1	1					1				1						1	1					1									1	8	1,2%
Contagem e calendário					1					1				1						2					1						2			8	1,2%
Problemas tipo torneira	1		1								1												1	1	1									5	0,8%
Sistema métrico			1	1			1				1		1	1																				6	0,9%
Potências e raízes	1	3	2	1	2	1	1	1	1			1		1	1	1	3	3			2	1		1		1	1		2	2	1	1	1	35	5,3%
Produtos notáveis e fatoração	2	1	1	1	1	1	1		1	1	1		2		2	1		1				2	1	3	2	1			2	1		2		29	4,4%
Racionalização e radical duplo	2			1	1	1	1	1	1		1			1		1			1	1		1				1			1	1				15	2,3%
Equação do 2º grau	5	1	2	1	1	2	1	1	1			2	1			1	1		1		1	2			1	1	1				1	1		24	3,6%
Função quadrática	1	1	1		1	1	1	1			1				1	1				2		1	1	1		1	1							16	2,4%
Equações fracionárias										1									1							1		1	1	1				6	0,9%
Equações biquadradas e redutíveis ao 2º grau			1	1						4	1	2		1	2		1		1		1		1		1						1			18	2,7%
Equações e inequações irracionais	3	1					1		1			1		1						1	1			1		1		1	1		1	1		13	2,0%
Polinômios e equações polinomiais		1	1	3	2	1		1				1									1	1						2		1		1	1	17	2,6%
Sequências																													1					1	0,2%
Função do 1º grau				1																1									1					3	0,5%
Equação do 1º grau e problemas do 1º grau	1	1						1			1			1	1		2		1													1		9	1,4%
Sistemas lineares e problemas relacionados		1	2			1	2			1	1	1		1		2	1	1	1	1	2		1	1		1	1					1	1	24	3,6%
Sistemas não lineares e problemas relacionados	1	1		1		1	1	1	1											1				1		1		3			1			13	2,0%
Inequações											1	1		1						1								1						5	0,8%
Inequações produto-quociente	1	1		1	2		1	1	1						1							1	1				1				1		1	13	2,0%
Desigualdades																												1						1	0,2%
Fundamentos e ângulos																									1									1	0,2%
Triângulos - ângulos, congruência e desigualdades			1	1					1			1	1	1	1	1	2	2	1				1							1				15	2,3%
Triângulos - pontos notáveis												1	1	1		1					1						1	1			2		1	10	1,5%
Triângulos retângulos							1			1	1		1			1						1	1			1					1		1	10	1,5%
Triângulos - semelhança e relações métricas	2	1	1	2	2	1	1	1		1					1	2					2		1		1		1					2		20	3,0%
Quadriláteros	1		1	2		1	1			1		1		1				1			1	1		1		1	1	1	1	2				18	2,7%
Polígonos - ângulos e diagonais	2		2		1	1		1	1		1	1		1	1			1					2						1					14	2,1%
Polígonos regulares - relações métricas				1				1	1		1		1			1	1				1		2	1										11	1,7%
Circunferência - posições relativas e segmentos tangentes	1			1					1		1		1			1				1	1			1	1	1	1	1						12	1,8%
Arco capaz, ângulos e comprimentos na circunferência		1			1	1			1	1				1			1	1		2					1	1	1		1		2		1	17	2,6%
Circunferência - relações métricas e potência de ponto	3	2					1	1				1	1		2				1	1		1												11	1,7%
Áreas	3	3	3	1	4	2	2	2	2	2	1	1	1	2	1	1	4	1	5	2		3	1	2	2	1	2	3	2	1	2	5	5	69	10,5%
TOTAL POR PROVA	**40**	**25**	**25**	**25**	**25**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**660**	**100,0%**
Aritmética	11	6	7	6	7	5	4	6	6	7	8	5	10	6	6	5	4	9	7	6	6	5	7	7	10	6	8	5	6	10	7	5	8	210	31,82%
Álgebra	17	12	10	11	10	9	10	8	7	7	7	9	3	7	8	7	8	5	6	8	8	9	5	8	4	9	5	9	9	6	6	8	4	242	36,67%
Geometria Plana	12	7	8	8	8	6	6	6	7	6	5	6	7	7	6	8	8	6	7	6	6	6	8	5	6	5	7	6	5	4	7	7	8	208	31,52%

CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES POR ASSUNTO

ARITMÉTICA

RACIOCÍNIO LÓGICO: 2016-10; 2002-14; 2001-1; 2001-6; 1994-20; 1991-2;

CONJUNTOS: 2016-19; 2014-4; 2012-10; 2011-11; 2008-15; 2007-6; 2006-3; 2001-15; 1999-4; 1998-9; 1998-17; 1995-18; 1992-4; 1991-3; 1989-14; 1988-5; 1987-6; 1986-1; 1986-2; 1985-1; 1985-18; 1984-1

OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS E INTEIROS: 2013-12; 2013-15; 2010-14; 2009-13; 2005-2; 1996-14; 1992-1; 1991-1; FB-16

NÚMEROS RACIONAIS: 2015-7; 2015-9; 2014-1; 2013-2; 2013-18; 2004-8; 2000-4; 1998-20; 1997-11; 1996-19; 1996-20; 1995-16; 1992-13; 1987-7; FB-12

CONJUNTOS NUMÉRICOS E NÚMEROS REAIS: 2012-11; 2008-20; 1999-10; 1999-15; 1994-11; 1988-1; 1988-2

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO: 2016-3; 2016-12; 2013-4; 2010-3; 2010-13; 2008-5; 2003-18; 2000-3; 1997-3; 1992-6; 1990-9; 1988-3; FB-23

MÚLTIPLOS E DIVISORES: 2016-17; 2016-18; 2014-10; 2014-17; 2014-19; 2013-6; 2013-8; 2012-14; 2011-4; 2010-8; 2009-18; 2007-11; 2007-17; 2005-10; 2004-4; 2002-6; 2002-11; 1996-11; 1992-14; 1991-4; 1990-11; 1986-4; 1984-7; FB-7; FB-13

DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA: 2015-14; 2013-11; 2012-1; 2012-15; 2012-20; 2011-5; 2010-5; 2010-15; 2005-13; 2005-16; 2004-9; 2001-19; 1996-18; 1994-9; 1987-2; 1984-2

FUNÇÃO PARTE INTEIRA: 2011-8;

MDC E MMC: 2015-8; 2013-7; 2009-4; 2009-14; 2008-11; 2006-2; 2006-9; 2004-5; 2003-4; 2002-2; 2002-4; 2001-3; 1994-5; 1990-8; 1987-4; FB-38

RAZÕES E PROPORÇÕES: 2015-2; 2010-19; 2008-12; 2008-18; 2006-12; 2004-16; 2003-13; 2001-5; 2000-5; 1998-7; 1998-15; 1996-6; 1996-17; 1991-6; 1989-9; 1987-1; 1984-4; 1984-21

REGRA DE TRÊS: 2016-4; 1996-16; FB-9; FB-25; FB-30

PORCENTAGEM: 2009-10; 2009-15; 2007-4; 2004-6; 2001-16; 2000-19; 1997-2; 1995-3; 1992-20; 1985-6

DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAIS E REGRA DE SOCIEDADE: 2008-14; 2007-10; 2005-14; 1986-11; 1985-11

OPERAÇÕES COM MERCADORIAS: 2011-10; 2006-19; 2003-15; 2001-11; 1998-6; 1997-4; 1996-12; 1994-16; 1990-16; 1989-8; 1986-6

JUROS SIMPLES E COMPOSTOS: 2008-4; 2006-15; 1999-8; 1995-8; 1994-3; 1991-7; 1990-6; 1988-4

MISTURAS: 2013-13; 2010-7; 2002-7; 1999-3; 1987-3; FB-39

MÉDIAS: 2016-5; 2007-19; 2002-9; 2001-9; 1995-14; 1990-10; 1985-25; 1984-3

CONTAGEM E CALENDÁRIO: 2014-3; 2014-11; 2008-9; 2003-1; 2003-9; 1997-5; 1992-5; 1987-9

PROBLEMAS TIPO TORNEIRA: 2008-16; 2007-3; 2006-14; 1994-10; 1985-3; FB-37

SISTEMA MÉTRICO: 1997-10; 1996-10; 1994-13; 1989-13; 1986-13; 1985-23

ÁLGEBRA

POTÊNCIAS E RAÍZES: 2016-11; 2015-10; 2014-7; 2013-1; 2013-19; 2012-7; 2012-16; 2010-18; 2009-8; 2007-7; 2005-9; 2004-11; 2004-14; 2001-4; 2001-13; 2001-14; 2000-6; 2000-9; 2000-11; 1999-5; 1998-16; 1997-15; 1995-12; 1991-5; 1990-2; 1989-5; 1988-7; 1987-16; 1987-24; 1986-7; 1985-2; 1985-15; 1984-5; 1984-6; 1984-15; FB-3

PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO: 2015-1; 2015-18; 2013-16; 2012-3; 2012-4; 2009-12; 2008-1; 2008-3; 2007-8; 2007-9; 2007-12; 2006-16; 2005-12; 2005-15; 2001-7; 1999-12; 1998-10; 1998-14; 1996-3; 1996-15; 1994-19; 1992-8; 1991-13; 1989-10; 1988-14; 1987-17; 1986-16; 1985-8; 1984-12; FB-8; FB-33

RACIONALIZAÇÃO E RADICAL DUPLO: 2013-17; 2012-13; 2009-19; 2005-11; 2003-3; 2002-5; 1999-2; 1997-18; 1994-8; 1991-10; 1990-14; 1989-11; 1988-6; 1987-5; 1986-9; FB-10; FB-14

EQUAÇÃO DO 2° GRAU: 2015-11; 2014-12; 2010-6; 2009-20; 2008-8; 2005-3; 2005-19; 2004-12; 2002-15; 2000-15; 1999-20; 1996-4; 1995-2; 1995-15; 1991-12; 1990-4; 1989-7; 1988-8; 1988-11; 1987-20; 1986-3; 1985-4; 1985-17; 1984-10; FB-11; FB-17; FB-28; FB-29; FB-32

FUNÇÃO QUADRÁTICA: 2010-12; 2009-16; 2007-14; 2006-6; 2005-17; 2003-10; 2003-14; 1999-18; 1998-19; 1994-2; 1990-18; 1989-17; 1988-13; 1987-21; 1985-13; 1984-8; FB-36

EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS: 2013-10; 2012-2; 2011-20; 2009-3; 2002-17; 1992-12;

EQUAÇÕES BIQUADRADAS E REDUTÍVEIS AO 2° GRAU: 2014-5; 2008-10; 2006-20; 2004-15; 2002-19; 2000-17; 1998-3; 1998-8; 1997-14; 1995-17; 1995-20; 1994-15; 1992-10; 1992-11; 1992-16; 1992-18; 1986-15; 1985-10

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES IRRACIONAIS: 2015-3; 2014-9; 2012-5; 2011-12; 2009-7; 2007-13; 2004-2; 2003-16; 1997-7; 1995-7; 1991-8; 1989-12; 1984-11; FB-24; FB-34; FB-40

POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS: 2016-9; 2015-16; 2013-14; 2011-2; 2011-13; 2005-4; 2004-19; 1995-4; 1990-20; 1988-12; 1987-14; 1987-25; 1986-8; 1986-10; 1986-14; 1985-19; 1984-13

SEQUÊNCIAS: 2012-12;

FUNÇÃO DO 1° GRAU: 2012-17; 2003-19; 1986-12

EQUAÇÃO DO 1° GRAU E PROBLEMAS DO 1º GRAU: 2015-15; 2002-18; 2000-7; 2000-10; 1998-4; 1997-1; 1994-14; 1990-7; 1984-16; FB-15

SISTEMAS LINEARES E PROBLEMAS RELACIONADOS: 2016-2; 2015-12; 2010-4; 2009-1; 2007-1; 2006-11; 2004-1; 2004-17; 2003-8; 2002-3; 2001-18; 2000-16; 1999-11; 1999-17; 1997-17; 1995-11; 1994-12; 1992-17; 1989-4; 1989-15; 1988-10; 1985-9; 1985-22; 1984-14

SISTEMAS NÃO LINEARES E PROBLEMAS RELACIONADOS: 2014-18; 2011-15; 2011-16; 2011-18; 2009-2; 2007-16; 2003-5; 1991-9; 1990-19; 1989-6; 1988-9; 1986-5; 1984-9; FB-31

INEQUAÇÕES: 2011-17; 2003-2; 1997-12; 1995-9; 1994-18;

INEQUAÇÕES PRODUTO QUOCIENTE: 2016-1; 2014-20; 2010-9; 2006-8; 2005-6; 1998-18; 1991-11; 1990-3; 1989-20; 1987-8; 1987-13; 1986-21; 1984-17; FB-6

DESIGUALDADES: 2011-19;

GEOMETRIA PLANA

FUNDAMENTOS E ÂNGULOS: 2008-2

TRIÂNGULOS – ÂNGULOS, CONGRUÊNCIA, DESIGUALDADES: 2013-20; 2006-1; 2002-12; 2001-17; 2001-20; 2000-12; 2000-20; 1999-19; 1998-12; 1997-19; 1996-1; 1995-19; 1991-16; 1986-18; 1985-7

TRIÂNGULOS – PONTOS NOTÁVEIS: 2016-13; 2014-13; 2014-14; 2011-14; 2010-11; 2004-3; 1999-1; 1997-13; 1996-7; 1995-5;

TRIÂNGULOS RETÂNGULOS: 2016-6; 2014-8; 2009-17; 2006-17; 2005-18; 1999-16; 1996-9; 1994-4; 1992-7; 1989-1;

TRIÂNGULOS – SEMELHANÇA E RELAÇÕES MÉTRICAS: 2015-6; 2015-17; 2010-10; 2008-7; 2006-18; 2004-10; 2004-20; 1999-9; 1999-14; 1998-2; 1992-19; 1990-1; 1989-16; 1988-15; 1987-12; 1987-22; 1986-22; 1986-25; 1985-12; 1984-22; FB-4; FB-19

QUADRILÁTEROS: 2013-3; 2013-5; 2012-8; 2011-9; 2010-17; 2009-6; 2007-5; 2005-5; 2004-13; 2001-2; 1997-20; 1995-1; 1992-9; 1989-3; 1988-20; 1986-19; 1986-20; 1985-21; FB-20

POLÍGONOS – ÂNGULOS E DIAGONAIS: 2012-18; 2006-7; 2006-13; 2001-10; 1998-11; 1997-6; 1995-10; 1994-7; 1991-14; 1990-5; 1988-18; 1987-11; 1985-5; 1985-16; FB-2; FB-18

POLÍGONOS – RELAÇÕES MÉTRICAS: 2007-2; 2006-4; 2006-10; 2004-18; 2000-13; 1999-6; 1996-5; 1994-1; 1991-18; 1990-12; 1986-23

CIRCUNFERÊNCIA – POSIÇÕES RELATIVAS E SEGMENTOS TANGENTES: 2011-6; 2010-1; 2009-9; 2008-17; 2007-18; 2004-7; 2003-7; 1999-13; 1996-13; 1994-17; 1991-15; 1986-17; FB-22

ARCO CAPAZ, ÂNGULOS E COMPRIMENTOS NA CIRCUNFERÊNCIA: 2016-7; 2014-6; 2014-15; 2012-9; 2010-16; 2009-5; 2008-6; 2003-6; 2003-17; 2001-12; 2000-18; 1997-8; 1992-3; 1991-19; 1988-17; 1987-18; 1984-20

CIRCUNFERÊNCIA – RELAÇÕES MÉTRICAS E POTÊNCIA DE PONTO: 2005-20; 2003-11; 2002-20; 1998-1; 1998-5; 1996-8; 1995-13; 1990-15; 1989-19; 1984-18; 1984-23; FB-21; FB-26; FB-27

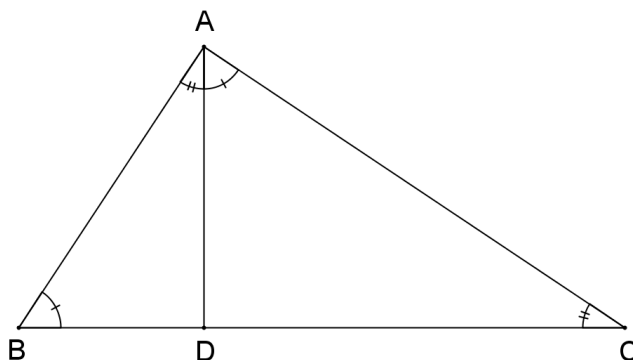
ÁREAS: 2016-8; 2016-14; 2016-15; 2016-16; 2016-20; 2015-4; 2015-5; 2015-13; 2015-19; 2015-20; 2014-2; 2014-16; 2013-9; 2012-6; 2012-19; 2011-1; 2011-3; 2011-7; 2010-2; 2010-20; 2009-11; 2008-13; 2008-19; 2007-15; 2007-20; 2006-5; 2005-1; 2005-7; 2005-8; 2003-12; 2003-20; 2002-1; 2002-8; 2002-10; 2002-13; 2002-16; 2001-8; 2000-1; 2000-2; 2000-8; 2000-14; 1999-7; 1998-13; 1997-9; 1997-16; 1996-2; 1995-6; 1994-6; 1992-2; 1992-5; 1991-17; 1991-20; 1990-13; 1990-17; 1989-2; 1989-18; 1988-16; 1988-19; 1987-10; 1987-15; 1987-19; 1987-23; 1986-24; 1985-14; 1985-20; 1985-24; 1984-19; 1984-24; 1984-25; FB-1; FB-5; FB-35

CAPÍTULO 3
ENUNCIADOS E RESOLUÇÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1989/1990

1) Num triângulo ABC traça-se a ceviana interna AD que o decompõe em dois triângulos semelhantes e não congruentes ABD e ACD. Conclui-se que tais condições:
(A) só são satisfeitas por triângulos acutângulos.
(B) só são satisfeitas por triângulos retângulos.
(C) só são satisfeitas por triângulos obtusângulos.
(D) podem ser satisfeitas, tanto por triângulos acutângulos tanto quanto por triângulos retângulos.
(E) podem ser satisfeitas, tanto por triângulos retângulos tanto quanto por triângulos obtusângulos.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Supondo $A\hat{B}D = A\hat{C}D$. Se $A\hat{D}B = A\hat{D}C = 90^\circ$, então $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$ o que contraria o enunciado. A outra possibilidade é $B\hat{A}D = A\hat{D}C$, o que não ocorre, visto que, pelo teorema do ângulo externo, $A\hat{D}C > B\hat{A}D$. Portanto, $A\hat{B}D \neq A\hat{C}D$.

Também pelo teorema do ângulo externo conclui-se que $A\hat{B}D \neq A\hat{D}C$.

Logo, a única correspondência possível é $A\hat{B}D = D\hat{A}C$. Analogamente, devemos ter $A\hat{C}D = D\hat{A}B$.
Assim, considerando a soma dos ângulos do ΔABC, temos:

$A\hat{B}D + B\hat{A}D + D\hat{A}C + A\hat{C}D = 180^\circ \Rightarrow 2(B\hat{A}D + D\hat{A}C) = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}C = 90^\circ$.

Portanto, o ΔABC é retângulo.

2) Os números da forma $4^{k^2+50} + 4^{k^2+51} + 4^{k^2+52} + 4^{k^2+53}$ são sempre múltiplos de:
(A) 17
(B) 19
(C) 23
(D) 29
(E) 31

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
$4^{k^2+50}+4^{k^2+51}+4^{k^2+52}+4^{k^2+53}=4^{k^2+50}+4^{k^2+50}\cdot 4^1+4^{k^2+50}\cdot 4^2+4^{k^2+50}\cdot 4^3=$

$=4^{k^2+50}\cdot(1+4+16+64)=4^{k^2+50}\cdot 85=4^{k^2+50}\cdot 5\cdot 17$

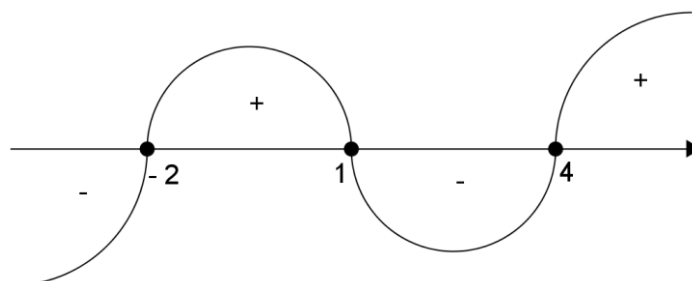
Logo, $4^{k^2+50}+4^{k^2+51}+4^{k^2+52}+4^{k^2+53}$ é sempre múltiplo de 17.

3) O maior valor inteiro que verifica a inequação $x\cdot(x+1)\cdot(x-4)<2\cdot(x-4)$ é:
(A) 1.
(B) negativo.
(C) par positivo.
(D) ímpar maior que 4.
(E) primo.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
$x\cdot(x+1)\cdot(x-4)<2\cdot(x-4)\Leftrightarrow x\cdot(x+1)\cdot(x-4)-2\cdot(x-4)<0\Leftrightarrow(x-4)\cdot[x\cdot(x+1)-2]<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-4)\cdot(x^2+x-2)<0\Leftrightarrow(x-4)\cdot(x+2)\cdot(x-1)<0$

Dispondo as três raízes sobre a reta real, obtemos o seguinte estudo de sinal da expressão.

$\Leftrightarrow x<-2\ \vee\ 1<x<4\Leftrightarrow S=]-\infty,-2[\cup]1,4[$

Portanto, o maior número inteiro que verifica a inequação é 3, que é primo.

4) Um aluno, ao tentar determinar as raízes x_1 e x_2 da equação $ax^2+bx+c=0$, $a\cdot b\cdot c\neq 0$, explicitou x da seguinte forma:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$$

Sabendo-se que não teve erro de contas, encontrou como resultado
(A) x_1 e x_2
(B) $-x_1$ e $-x_2$

(C) x_1^{-1} e x_2^{-1}
(D) $c \cdot x_1$ e $c \cdot x_2$
(E) $a \cdot x_1$ e $a \cdot x_2$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Se x_1 e x_2 são raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, então temos, a menos da ordem, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Sejam $x'_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$, então

$$x'_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{a}{c} \cdot x_1 = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} \cdot x_1 = \frac{1}{x_2} = x_2^{-1}$$

$$x'_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{a}{c} \cdot x_2 = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} \cdot x_2 = \frac{1}{x_1} = x_1^{-1}$$

5) O número de polígonos regulares de gênero par tais que, quaisquer duas de suas diagonais, que passam pelo seu centro, formam entre si ângulo expresso em graus por número inteiro, é:
(A) 17
(B) 18
(C) 21
(D) 23
(E) 24

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Se quaisquer duas diagonais de um polígono regular, que passam pelo seu centro, formam entre si ângulo expresso em graus por número inteiro, então o ângulo central determinado pelo polígono deve ser expresso por um número inteiro.

O ângulo central determinado por um polígono regular de gênero par $n \geq 3$ é $\frac{360^\circ}{n}$. Para que esse ângulo seja expresso por um número inteiro, n deve ser um divisor natural e par de 360°. A quantidade de divisores naturais e pares de $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ é $d_{pares}(360) = (3) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 18$. Mas, 2 é um divisor par de 360 e não é um valor válidos para n. Portanto, o número de polígonos que satisfazem as condições pedidas é $18 - 1 = 17$.

OBSERVAÇÃO: Foi acrescentada ao enunciado a condição de que o polígono deveria ter gênero par para dar mais precisão ao enunciado. Sem essa condição uma análise lógica da pergunta permitiria

considerar que qualquer polígono de gênero ímpar satisfaria às condições do enunciado, visto que eles não possuem diagonais passando pelo centro.

6) Uma pessoa tomou um capital $\underline{C}$ a uma taxa mensal numericamente igual ao número de meses que levará para saldar o empréstimo. Tal pessoa aplica o capital $\underline{C}$ a uma taxa de 24% ao mês. Para que tenha um lucro máximo na operação, deverá fazer o empréstimo e a aplicação durante um número de meses igual a:
(A) 6
(B) 12
(C) 18
(D) 24
(E) 36

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Seja n o número de meses que a pessoa levará para saldar o empréstimo, então o montante resultante do capital aplicado será $C\cdot\left(1+\frac{24}{100}\cdot n\right)$ e a dívida a pagar será $C\cdot\left(1+\frac{n}{100}\cdot n\right)$. O lucro $L(n)$ na operação é dado por $L(n)=C\cdot\left(1+\frac{24}{100}\cdot n\right)-C\cdot\left(1+\frac{n}{100}\cdot n\right)=\frac{C}{100}\cdot\left(24n-n^2\right)$.
A expressão do lucro é do 2º grau em n e tem coeficiente-líder negativo, logo possui ponto de máximo que ocorre no vértice, cuja abscissa é dada por $n=\frac{-24}{2\cdot(-1)}=12$ meses.
Observe que o fator $\frac{C}{100}$ em evidência não afeta a obtenção da abscissa do vértice, pois ele seria simplificado.

7) Sabe-se que a equação do 1º grau na variável x, $2mx-x+5=3px-2m+p$ admite as raízes $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}$. Entre os parâmetros m e p vale a relação:
(A) $p^2+m^2=25$
(B) $p\cdot m=6$
(C) $m^p=64$
(D) $p^m=32$
(E) $\frac{p}{m}=\frac{3}{5}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$2mx - x + 5 = 3px - 2m + p \Leftrightarrow 2mx - 3px - x = -2m + p - 5 \Leftrightarrow x(2m - 3p - 1) = -2m + p - 5$

Como a equação é do 1º grau e admite 2 raízes, então ela é possível e indeterminada e devemos ter uma expressão da forma $0 \cdot x = 0$. Assim, temos:

$$\begin{cases} 2m - 3p - 1 = 0 \\ -2m + p - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3p = 1 \\ -2m + p = 5 \end{cases} \Leftrightarrow p = -3 \text{ e } m = -4$$

$$p^2 + m^2 = (-3)^2 + (-4)^2 = 25$$

8) Se o $\text{m.d.c.}(a;b;c) = 100$ e o $\text{m.m.c.}(a;b;c) = 600$, podemos afirmar que o número de conjuntos de três elementos positivos e distintos $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ é:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$\text{mdc}(a;b;c) = 100 \Rightarrow \text{mdc}\left(\frac{a}{100}, \frac{b}{100}, \frac{c}{100}\right) = 1$$

$$\text{mmc}(a;b;c) = 600 \ \wedge \ 100 \mid a,b,c \Rightarrow \text{mmc}\left(\frac{a}{100}, \frac{b}{100}, \frac{c}{100}\right) = \frac{600}{100} = 6$$

Como $\frac{a}{100}$, $\frac{b}{100}$ e $\frac{c}{100}$ são distintos, temos a menos da ordem os seguintes valores $(1,2,6)$, $(1,3,6)$, $(1,2,3)$ e $(2,3,6)$.

Logo, temos 4 conjuntos que satisfazem às condições do enunciado.

NOTA 1: MDC e MMC

Máximo divisor comum (M.D.C.)

Definição: Sejam a e b dois inteiros não simultaneamente nulos. O máximo divisor comum de a e b é o inteiro positivo $d = \text{mdc}(a,b)$ que satisfaz:

(1) $d \mid a$ e $d \mid b$
(2) se $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \le d$.

Corolários:

(I) $\text{mdc}(a,1) = 1$
(II) se $a \neq 0$, então $\text{mdc}(a,0) = |a|$

Exemplos: $\text{mdc}(8,1)=1$; $\text{mdc}(-2,0)=2$

Diz-se que a e b são **primos entre si** se, e somente se, $\text{mdc}(a,b)=1$.

Ex.: São primos entre si os pares 2 e 5, 9 e 16 e 20 e 21.

Dois inteiros primos entre si admitem como únicos divisores comuns 1 e -1.

Propriedades do MDC:

(I) O MDC de dois números tais que um divide o outro é o módulo do divisor.

$$a \mid b \Rightarrow \text{mdc}(a,b)=|a|$$

Exemplos: $\text{mdc}(-6,12)=|-6|=6$.

(II) Dividindo-se dois números pelo seu MDC, os quocientes são primos entre si.

$$\text{mdc}(a,b)=d \Rightarrow \text{mdc}(a/d, b/d)=1$$

Exemplo: $\text{mdc}(42,54)=6 \Rightarrow \text{mdc}\left(\frac{42}{6},\frac{54}{6}\right)=\text{mdc}(7,9)=1$

(III) Se dois números são primos entre si, então todos os divisores de um deles são primos com o outro.

$$a \mid b \;\wedge\; \text{mdc}(b,c)=1 \Rightarrow \text{mdc}(a,c)=1$$

Exemplo: $3 \mid 18 \wedge \text{mdc}(18,35)=1 \Rightarrow \text{mdc}(3,35)=1$

(IV) Se dois números são divisores de um terceiro e são primos entre si, então o produto desses números também é um divisor do terceiro número.

$$a \mid c,\, b \mid c \;\wedge\; \text{mdc}(a,b)=1 \Rightarrow a \cdot b \mid c$$

Exemplo: $2 \mid 72,\, 3 \mid 72 \wedge \text{mdc}(2,3)=1 \Rightarrow 2\cdot 3 \mid 72$

(V) Se um número é primo com dois outros, também é primo com seu produto.

$$\text{mdc}(a,b)=\text{mdc}(a,c)=1 \Rightarrow \text{mdc}(a,bc)=1$$

Exemplo: $\text{mdc}(2,5)=\text{mdc}(2,7)=1 \Rightarrow \text{mdc}(2,35)=1$

(VI) Multiplicando-se ou dividindo-se dois ou mais números por um número não nulo, seu mdc fica multiplicado ou dividido por esse número.

$$\text{mdc}(a,b)=d \Rightarrow \text{mdc}(a\cdot k, b\cdot k)=d\cdot|k|$$

$$\text{mdc}(a,b)=d \;\wedge\; k \mid d \Rightarrow \text{mdc}(a/k, b/k)=d/|k|$$

Exemplos: $\text{mdc}(72,30)=6$

$\Rightarrow \text{mdc}\left(\frac{72}{2},\frac{30}{2}\right)=\text{mdc}(36,15)=\frac{6}{2}=3$

$\Rightarrow \text{mdc}(72\cdot 3, 30\cdot 3)=\text{mdc}(216,90)=6\cdot 3=18$

(VII) Teorema de Euclides: Se um número divide o produto de outros dois e é primo com um deles, então esse número divide o outro.

$$a \mid b \cdot c \ \wedge \ \text{mdc}(a,b)=1 \Rightarrow a \mid c$$

Exemplo: $3|12 \cdot 14 \ \wedge \ \text{mdc}(3,\ 14)=1 \Rightarrow 3|12$

(VIII) O mdc de dois números positivos é igual ao mdc do menor e do resto da divisão desses dois números.

$$a = b \cdot q + r,\ \ 0 \le r < b \Rightarrow \text{mdc}(a,b) = \text{mdc}(b,r)$$

Demonstração: Se $\text{mdc}(a,b)=d$, então $d \mid a$ e $d \mid b$, donde $d \mid (a-qb)$, ou seja, $d \mid r$. Logo, d é divisor comum de b e r. Se c é um divisor comum de b e r, então $c \mid (bq+r)$, ou seja, $c \mid a$, isto é, c é divisor comum de a e b, donde $c \le d$. Logo, $\text{mdc}(b,r)=d$.

Exemplo:

$72 = 30 \cdot 2 + 12 \Rightarrow \text{mdc}(72,30) = \text{mdc}(30,12)$

$30 = 12 \cdot 2 + 6 \Rightarrow \text{mdc}(30,12) = \text{mdc}(12,6)$

$12 = 6 \cdot 2 \Rightarrow \text{mdc}(12,6) = \text{mdc}(6,0) = 6$

(IX) Existência e unicidade do MDC: Sejam a e b dois inteiros não simultaneamente nulos, então $\text{mdc}(a,b)$ existe, e é único; além disso, existem x e y tais que $\text{mdc}(a,b)=ax+by$, isto é, o $\text{mdc}(a,b)$ é uma combinação linear de a e b.

A representação do $\text{mdc}(a,b)$ como combinação linear de a e b não é única. Na verdade, $\text{mdc}(a,b)=d=a\cdot(x+bt)+b(y-at)$, para qualquer inteiro t.

(X) Múltiplos do MDC: O conjunto de todos os múltiplos do $\text{mdc}(a,b)=d$ é $T=\{ax+by \mid x,y \in \mathbb{Z}\}$.

(XI) Dois inteiros a e b, não simultaneamente nulos, são primos entre si se, e somente se, existem inteiros x e y tais que $ax+by=1$.

Métodos de obtenção do MDC

Método das Divisões Sucessivas ou Algoritmo de Euclides

Para encontrar o mdc de dois números, divide-se o maior pelo menor; em seguida, o menor pelo resto; depois o primeiro resto pelo segundo resto; e assim sucessivamente, até que se obtenha resto zero. O mdc dos números será o último divisor.

O método acima normalmente é apresentado através do dispositivo de cálculo a seguir:

	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	$\cdots$	r_{n-1}	r_n
r_1	r_2	r_3	$\cdots$	r_n	0	

O aparecimento do resto 0 indica que $r_n = \text{mdc}(a,b)$.

Exemplo: Calcular o $\text{mdc}(936, 588)$

	1	1	1	2	4	2
936	588	348	240	108	24	12
348	240	108	24	12	0	

$\text{resto} = 0 \Rightarrow \text{mdc}(936, 588) = 12$

Método das Decomposições Canônicas:

Se $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ e $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$, onde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são os fatores primos que ocorrem nas fatorações de a e b, e os expoentes podem ser nulos, então

$$\text{mdc}(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta 1\}} \cdot p_2^{\min\{\alpha_2, \beta_2\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min\{\alpha_n, \beta_n\}},$$

ou seja, $\text{mdc}(a, b)$ é o produto dos fatores primos comuns às duas decomposições tomados com seus menores expoentes.

Exemplo: $588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \wedge 936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13 \Rightarrow \text{mdc}(588, 936) = 2^2 \cdot 3 = 12$

Mínimo múltiplo comum (M. M. C.)

Sejam a e b dois inteiros não nulos, chama-se mínimo múltiplo comum de a e b o inteiro positivo $m = \text{mmc}(a, b)$ que satisfaz as condições:

(1) $a \mid m$ e $b \mid m$
(2) se $a \mid c$ e $b \mid c$, com $c > 0$, então $m \leq c$.

A condição (1) diz que m é um múltiplo comum de a e b; a condição (2) diz que qualquer outro múltiplo comum será maior ou igual a c.

Propriedades do MMC:

(I) O mmc de dois números é menor ou igual ao módulo do seu produto.

$$\text{mmc}(a, b) \leq |a \cdot b|$$

Exemplo: $\text{mmc}(18, 12) = 36 \leq 18 \cdot 12 = 216$

(II) O mmc de dois números tais que um é múltiplo do outro é o módulo do múltiplo.

$$a \mid b \Rightarrow \text{mmc}(a, b) = |b|$$

Exemplo: $18 \mid 54 \Rightarrow \text{mmc}(18, 54) = 54$

(III) Se dois números são primos entre si, então o mmc entre eles é o seu produto.

$$\text{mdc}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{mmc}(a, b) = a \cdot b$$

Exemplo: $\text{mdc}(15, 14) = 1 \Rightarrow \text{mmc}(15, 14) = 15 \cdot 14 = 210$

(IV) Dividindo-se o mmc de dois ou mais números positivos, por cada um dos números, os quocientes obtidos são primos entre si.

$$\text{mmc}(a,b)=m \Rightarrow \text{mdc}(m/a, m/b)=1$$

Exemplo: $\text{mmc}(18,12)=36 \Rightarrow \text{mdc}\left(\frac{36}{18},\frac{36}{12}\right)=\text{mdc}(2,3)=1$

(V) Multiplicando-se ou dividindo-se dois ou mais números por um número não nulo, seu mmc fica multiplicado ou dividido pelo módulo por esse número.

$$\text{mmc}(a,b)=m \Rightarrow \text{mmc}(ak,bk)=m\cdot|k|$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{mmc}(a,b)=m\\ k\mid \text{mdc}(a,b)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{mmc}(a/k, b/k)=m/|k|$$

Exemplos:

$\text{mmc}(72,30)=360$

$\text{mmc}\left(\frac{72}{2},\frac{30}{2}\right)=\text{mmc}(36,15)=\frac{360}{2}=180$

$\text{mmc}(72\cdot 3, 30\cdot 3)=\text{mmc}(216,90)=360\cdot 3=1080$

(VI) Teorema: O produto do mdc pelo mmc de dois números positivos é igual ao produto dos números.

$$\text{mdc}(a,b)\cdot\text{mmc}(a,b)=a\cdot b$$

Demonstração:

Sejam $\text{mdc}(a,b)=d$ e $\text{mmc}(a,b)=m$. Como $a\mid a\cdot(b/d)$ e $b\mid b\cdot(a/d)$, então ab/d é múltiplo comum de a e b. Portanto, existe $k\in\mathbb{Z}_+^*$ tal que $ab/d=mk$, donde $a/d=(m/b)\cdot k$ e $b/d=(m/a)\cdot k$, isto é k é divisor comum de a/d e b/d. Mas, a/d e b/d são primos entre si, donde $k=1$. Logo, $ab/d=m$, ou seja, $ab=dm$.

Métodos de obtenção do MMC

Método das decomposições simultâneas

Os números são divididos pelos fatores primos comuns e não comuns até que os números resultantes sejam todos iguais a 1. O mmc é o produto dos fatores primos obtidos.

Exemplo: Calcular $\text{mmc}(936,588)$

936	588	2
468	294	2
234	147	2
117	147	3
39	49	3
13	49	7
13	7	7
13	1	13
1	1	

$\text{mmc}(936,588) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 = 45864$

Método das Decomposições canônicas:

Se $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ e $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$, onde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são os fatores primos que ocorrem nas fatorações de a e b, e os expoentes podem ser nulos, então

$$\text{mmc}(a,b) = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta 1\}} \cdot p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max\{\alpha_n,\beta_n\}}$$

ou seja, $\text{mmc}(a,b)$ é o produto dos fatores primos comuns e não comuns às duas decomposições tomados com seus maiores expoentes.

Exemplo: $588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \ \wedge \ 936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13 \Rightarrow \text{mmc}(588,936) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 = 45864$

****

9) O cubo de $12_{(b)}$ é $1750_{(b)}$. A base de numeração b é:

(A) primo.
(B) ímpar e não primo.
(C) par menor que 5.
(D) par entre 5 e 17.
(E) par maior que 17.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$12_{(b)} = 1 \cdot b + 2 = b + 2$

$1750_{(b)} = 1 \cdot b^3 + 7 \cdot b^2 + 5 \cdot b + 0 = b^3 + 7b^2 + 5b$

$\left[12_{(b)}\right]^3 = \left[1750_{(b)}\right] \Leftrightarrow (b+2)^3 = b^3 + 7b^2 + 5b \Leftrightarrow b^3 + 6b^2 + 12b + 8 = b^3 + 7b^2 + 5b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2 - 7b - 8 = 0 \Leftrightarrow b = -1 \ \vee \ b = 8$

Como b é uma base de numeração, então deve ser um número natural maior ou igual a 2. Portanto, $b = 8$ que é um número par entre 5 e 17.

10) No Colégio Naval, a turma do 1º Ano é distribuída em 5 salas. Num teste de Álgebra, as médias aritméticas das notas dos alunos, por sala, foram, respectivamente: $5,5$; $5,2$; $6,3$; $7,1$ e $5,9$. A média aritmética das notas da turma é:

(A) $5,9$
(B) $6,0$
(C) $6,15$
(D) $6,5$
(E) impossível calcular

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Para obter a média aritmética das notas da turma, teríamos que efetuar a média aritmética ponderada das médias de cada uma das 5 salas, tendo como pesos o número de alunos em cada sala. Como o número de alunos por sala não foi informado, é impossível calcular a média da turma. Podemos apenas afirmar que ela está entre $5,2$ (menor valor) e $7,1$ (maior valor).

11) Sejam $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \le 1200\}$ e $B = \{y \in A \mid y \text{ é primo com } 1200\}$. O número de elementos de B é:
(A) 270
(B) 300
(C) 320
(D) 360
(E) 420

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
A quantidade de elementos do conjunto B é $\phi(1200)$, onde $\phi(n)$ é a função de Euler do número n e representa a quantidade de naturais menores que n e primos com n.
Como $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$, então $\#(B) = \phi(1200) = 1200 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 1200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 320$.

NOTA 2: FUNÇÃO DE EULER

A **Função ϕ de Euler** é uma função aritmética definida para todo inteiro positivo n tal que $\phi(n)$ é o número de inteiros positivos menores ou iguais a n e que são relativamente primos com n.

Exemplo: $\phi(8) = 4$, pois 1, 3, 5 e 7 são relativamente primos com 8.

p é primo $\Rightarrow \phi(p) = p - 1$

p é primo e k é um inteiro positivo $\Rightarrow \phi(p^k) = p^k \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

Se $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ é a decomposição canônica do inteiro positivo $n > 1$, então

$$\phi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = n \cdot \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Exemplo: $12 = 2^2 \cdot 3 \Rightarrow \phi(12) = 12 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4$

Teorema de Euler: Se $m \in \mathbb{Z}_+^*$, $a \in \mathbb{Z}$ e $\text{mdc}(a, m) = 1$, então $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Exemplo: $\text{mdc}(10,33)=1 \Rightarrow 10^{\phi(33)}=10^{20}\equiv 1 \pmod{33}$.

Exemplo: Se $\text{mdc}(a,m)=1$, resolver $ax \equiv b \pmod m$.

Pelo teo. de Euler, $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m \Rightarrow a^{\phi(m)}\cdot b \equiv b \pmod m \Rightarrow ax \equiv a^{\phi(m)}\cdot b \pmod m$

Como $\text{mdc}(a,m)=1$, podemos cancelar o fator a, então $x \equiv a^{\phi(m)-1}\cdot b \pmod m$

A parte inteira da metade de $\phi(n)$ representa a quantidade de espécies de polígonos regulares que se pode formar de n lados, convexos e estrelados.

A quantidade de algarismos do período de uma dízima periódica, obtidos a partir de uma fração irredutível $\frac{N}{D}$, é igual a $\phi(D)$ ou um divisor positivo deste.

Exemplo: Seja a fração $\frac{2}{11}$, como $\phi(11)=10$, seu período pode ter 1, 2, 5 ou 10 algarismos. Como $\frac{2}{11}=\frac{18}{99}$ o período terá 2 algarismos.

A soma dos números entre 1 e n que são primos com n é $\frac{n\cdot\phi(n)}{2}$.

Ordem de a com respeito a n é o número natural $\text{ord}_n(a)=\min\{i\in\mathbb{N}^*; a^i \equiv 1 \pmod n\}$.

Se $a,n\in\mathbb{N}$, com $\text{mdc}(a,n)=1$, então $\text{ord}_n(a) \mid \phi(n)$.

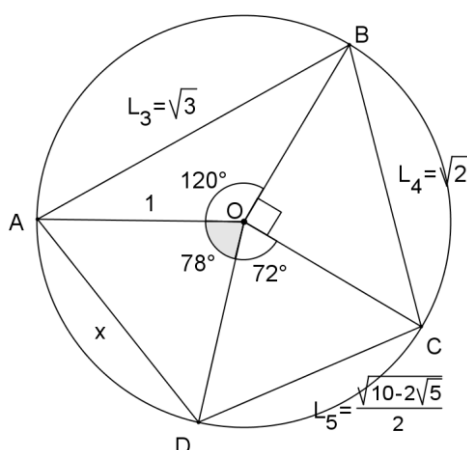
****

12) O quadrilátero $ABCD$ está inscrito num círculo de raio unitário. Os lados AB, BC e CD são, respectivamente, os lados do triângulo equilátero, do quadrado e do pentágono regular inscrito no círculo. Se x é a medida do lado AD do quadrilátero, pode-se afirmar que:

Observação: $\overline{CD}$ é aproximadamente igual a $1,2$.

(A) $1,0 < x < 1,2$
(B) $1,2 < x < 1,4$
(C) $1,4 < x < 1,6$
(D) $1,6 < x < 1,8$
(E) $1,8 < x < 2,0$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

O lado do triângulo equilátero é $L_3 = R\sqrt{3} = \sqrt{3} \approx 1,7$, o lado do quadrado é $L_4 = R\sqrt{2} = \sqrt{2} \approx 1,4$ e o lado do pentágono regular é $L_5 = \frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \simeq 1,2$.

O lado AD de medida x é uma corda que determina um arco de 78°.

Mas, $72^\circ < 78^\circ < 90^\circ \Rightarrow L_5 < x < L_4 \Rightarrow 1,2 < x < 1,4$.

Observe que não era necessário conhecer a expressão do lado do triângulo equilátero, pois não foi usada, e nem a do pentágono regular, pois sua medida foi dada. O importante nesse problema era identificar o ângulo central.

13) Os lados do triângulo ABC medem $AB = 2$; $AC = 2\sqrt{3}$ e $BC = 4$. A área da interseção entre o círculo de centro B e raio $\overline{BA}$, o círculo de centro C e raio $\overline{CA}$ e o triângulo ABC é:

(A) $\frac{3\pi}{2} - 2\sqrt{3}$

(B) $\frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

(C) $\frac{5\pi}{4} - 2\sqrt{3}$

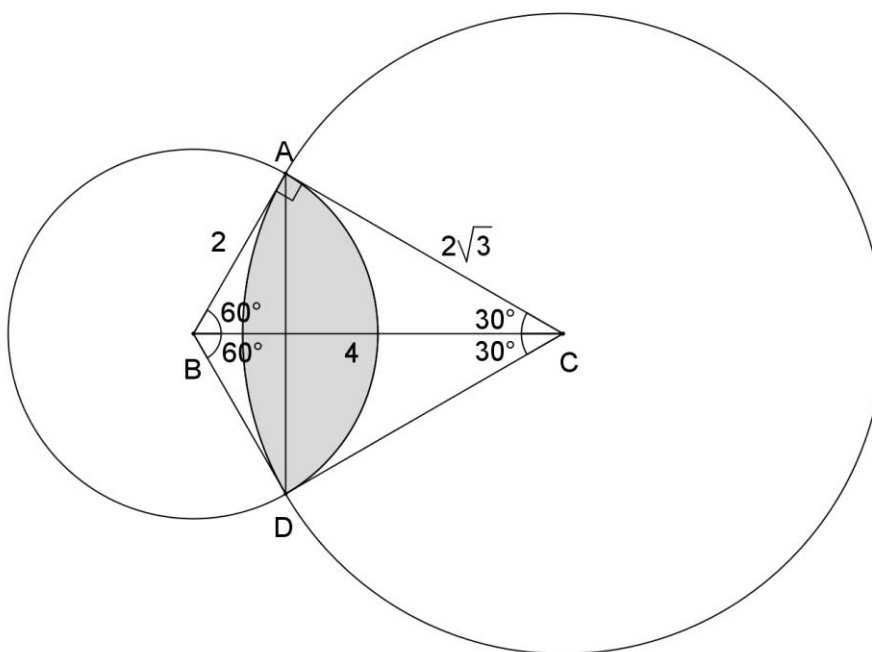
(D) $\frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

(E) $\frac{6\pi}{5} - 2\sqrt{3}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, observemos que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ e, portanto, o ΔABC é retângulo de hipotenusa BC.

Além disso, $\text{sen}\,\hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$. Portanto, os ângulos do triângulo são 30°, 60° e 90°.

A figura acima representa a situação descrita no enunciado. A área da interseção entre os dois círculos e o ΔABC é igual à metade da região sombreada e que corresponde à metade da soma do segmento circular de 120° em um círculo de raio 2 e um segmento circular de 60° em um círculo de raio $2\sqrt{3}$. Assim, temos:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\pi\cdot 2^2\cdot\frac{120^\circ}{360^\circ}-\frac{2^2}{2}\cdot\operatorname{sen}120^\circ\right)+\left(\pi\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2\cdot\frac{60^\circ}{360^\circ}-\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{2}\operatorname{sen}60^\circ\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}+2\pi-3\sqrt{3}\right)=\left(\frac{5\pi}{3}-2\sqrt{3}\right)\text{u.a.}$$

14) O denominador da fração irredutível, resultante da racionalização de

$$\frac{1}{6\sqrt{50-5\sqrt{75}}-\sqrt{128-16\sqrt{48}}},$$

é:

(A) 11
(B) 22
(C) 33
(D) 44
(E) 55

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

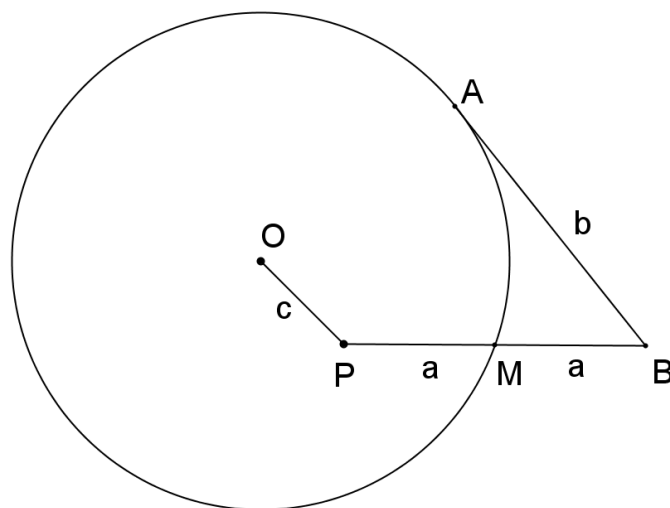
$\sqrt{50-5\sqrt{75}}=\sqrt{50-25\sqrt{3}}=5\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\sqrt{128-16\sqrt{48}}=\sqrt{128-64\sqrt{3}}=8\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{6\sqrt{50-5\sqrt{75}}-\sqrt{128-16\sqrt{48}}}=\frac{1}{6\cdot 5\sqrt{2-\sqrt{3}}-8\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{1}{22\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{22\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{22\sqrt{4-3}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{22}$$

Logo, o denominador da fração irredutível é 22.

15) Na figura abaixo tem-se que O é o centro do círculo, P é um ponto qualquer do seu interior, $\text{Med}\left(\overline{PM}\right)=\text{Med}\left(\overline{MB}\right)=a$ e AB é tangente ao círculo em A. Se $a^2=bc$, o raio do círculo é igual a:

(A) $|a+c-b|$

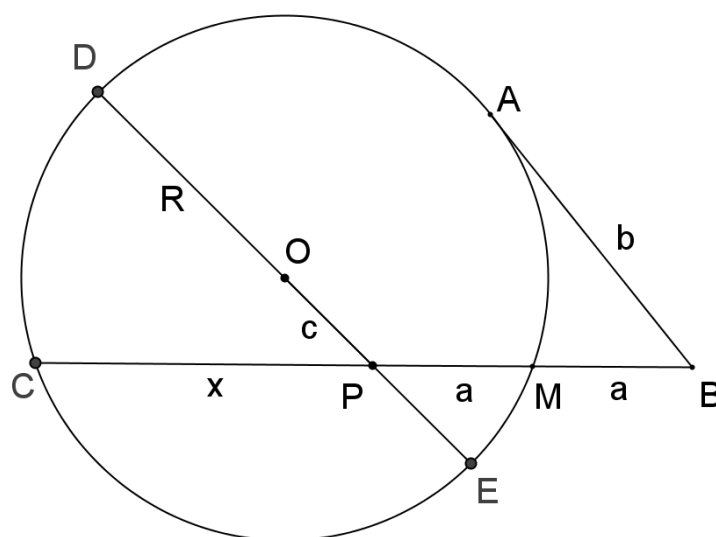
(B) $|2a+c-b|$

(C) $|a+b-c|$

(D) $|2a-c|$

(E) $|b-c|$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Usando a potência do ponto P em relação à circunferência, temos:

$DP \cdot PE = MP \cdot PC \Rightarrow (R+c)(R-c) = a \cdot x \Leftrightarrow ax = R^2 - c^2$ (I).

Usando a potência do ponto B em relação à circunferência, temos:

$BA^2 = BC \cdot BM \Rightarrow b^2 = (2a+x) \cdot a \Leftrightarrow b^2 = 2a^2 + ax$.

$a^2 = bc \Rightarrow b^2 = 2a^2 + ax = 2 \cdot bc + ax \Leftrightarrow ax = b^2 - 2bc$ (II)

Igualando (I) e (II), temos: $R^2 - c^2 = b^2 - 2bc \Leftrightarrow R^2 = b^2 - 2bc + c^2 = (b-c)^2 \Leftrightarrow R = |b-c|$.

16) Um vendedor sempre coloca os seus produtos à venda com lucro de 70% sobre o preço de custo. Se o preço de custo de um certo produto aumentou de $R\$170,00$, o que corresponde a 20% do preço que tal produto era vendido, o novo preço de venda é:

(A) $R\$ 850,00$

(B) $R\$ 1.020,00$

(C) $R\$ 1.139,00$

(D) $R\$ 1.224,00$

(E) $R\$ 1.445,00$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Seja P_c e P_c' os preços de custo inicial e final, P_v e P_v' os preços de venda inicial e final, e considerando que o lucro é a diferença entre o preço de venda e o preço de custo, temos:

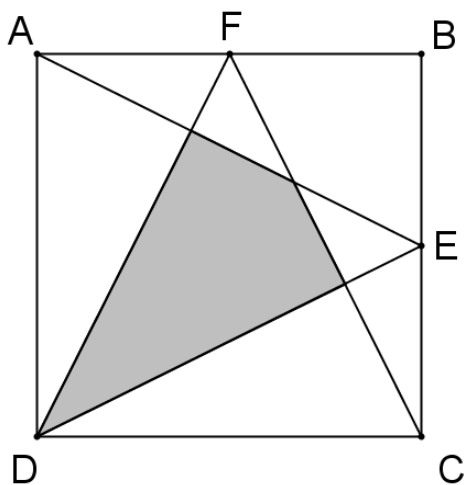
$P_v = P_c + 70\% \cdot P_c = 1,7 \cdot P_c$

$170,00 = 20\% \cdot P_v = 0,2 \cdot 1,7 \cdot P_c = 0,34 \cdot P_c \Leftrightarrow P_c = \dfrac{170,00}{0,34} = 500,00$

$P_c' = P_c + 170,00 = 500,00 + 170,00 = 670,00$

$P_v' = 1,7 \cdot P_c' = 1,7 \cdot 670,00 = 1.139,00$

Logo, o novo preço de venda é R$ 1.139,00.

17) No quadrado ABCD de área S da figura acima, os pontos E e F são médios. A área da parte sombreada é:

(A) $\frac{2S}{15}$

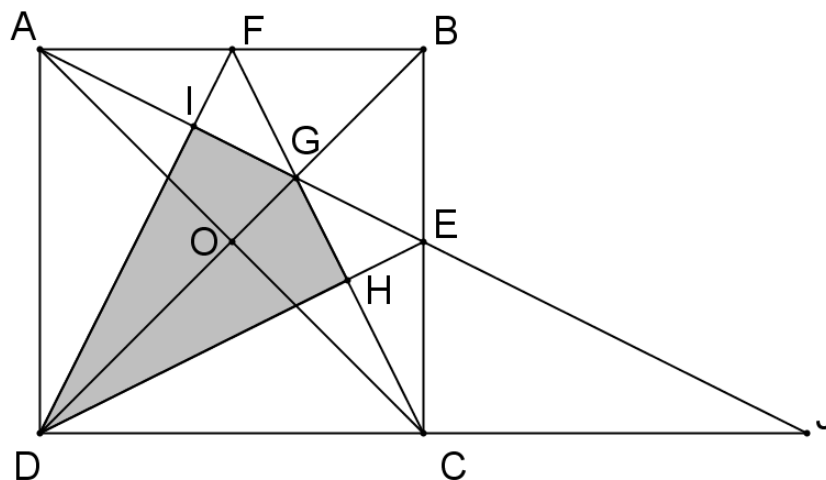
(B) $\frac{S}{5}$

(C) $\frac{4S}{15}$

(D) $\frac{S}{3}$

(E) $\frac{2S}{5}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$S(BDF)=\frac{1}{2}S(ABD)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}S(ABCD)=\frac{S}{4}$

G é o baricentro do $\Delta ABC \Rightarrow BG=\frac{2}{3}BO=\frac{1}{3}BD \Rightarrow S(DFG)=\frac{2}{3}S(BDF)=\frac{2}{3}\cdot\frac{S}{4}=\frac{S}{6}$

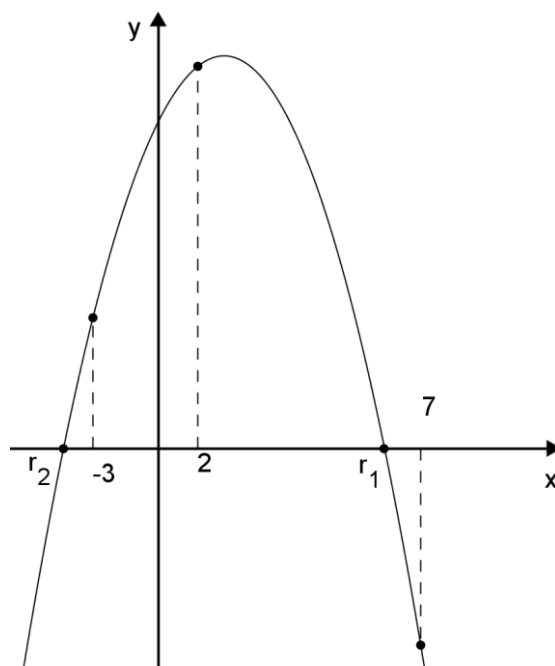
$\Delta AFI \sim \Delta DJI \Rightarrow \frac{FI}{DI}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{FI}{DF}=\frac{1}{5} \Rightarrow S(DGI)=\frac{4}{5}S(DFG)=\frac{4}{5}\cdot\frac{S}{6}=\frac{2S}{15}$

$S(DHGI)=2\cdot S(DGI)=2\cdot\frac{2S}{15}=\frac{4S}{15}$

18) No trinômio $y=ax^2+bx+c$, $a<0$, o seu valor numérico para $x=-3$ é positivo, para $x=2$ é positivo e para $x=7$ é negativo. Logo, pode-se afirmar que:

(A) $b>0$
(B) $b<0$
(C) $b=0$ ou $c=0$
(D) $c>0$
(E) $c<0$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Como $a<0$, o gráfico do trinômio $y=ax^2+bx+c$ é uma parábola com concavidade para baixo.
Se o valor numérico de y para $x=2$ é positivo e para $x=7$ é negativo, então existe um número ímpar de raízes reais em $]2,7[$. Como o trinômio do 2º grau possui no máximo duas raízes reais, então há exatamente uma raiz em $]2,7[$.

A figura acima é um esboço da situação descrita no enunciado, onde aparece uma raiz real $r_1 \in]2,7[$ e a segunda raiz $r_2 < -3$. Portanto, o trinômio possui raízes reais de sinais contrários, o que implica que o produto das raízes é negativo.

Dessa forma, pelas relações entre coeficientes e raízes, temos $P = r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} < 0$ e, como $a < 0$, conclui-se que $c > 0$.

19) Resolvendo-se o sistema $\begin{cases} \sqrt{x} \cdot y \cdot z = \frac{8}{3} \\ x \cdot \sqrt{y} \cdot z = \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ x \cdot y \cdot \sqrt{z} = \frac{16\sqrt{2}}{27} \end{cases}$, tem-se que $\frac{x+y+z}{x \cdot y \cdot z}$ é igual a:

(A) $\frac{21}{4}$

(B) $\frac{35}{8}$

(C) $\frac{35}{16}$

(D) $\frac{105}{16}$

(E) $\frac{105}{32}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, cumpre observar que $x, y, z > 0$.
Multiplicando as três equações, vem:

$$x^2\sqrt{x} \cdot y^2\sqrt{y} \cdot z^2\sqrt{z} = \frac{1024}{243} \Leftrightarrow x^{\frac{5}{2}} \cdot y^{\frac{5}{2}} \cdot z^{\frac{5}{2}} = \frac{2^{10}}{3^5} \Leftrightarrow (x \cdot y \cdot z)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{4}{3}\right)^5$$

$$\Leftrightarrow x \cdot y \cdot z = \left[\left(\frac{4}{3}\right)^5\right]^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

$$\frac{x \cdot y \cdot z}{\sqrt{x} \cdot y \cdot z} = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{8}{3}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{16}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}$$

$$\frac{x\cdot y\cdot z}{x\cdot\sqrt{y}\cdot z}=\frac{\frac{16}{9}}{\frac{4\sqrt{2}}{3}}\Leftrightarrow\sqrt{y}=\frac{16}{9}\cdot\frac{3}{4\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\Leftrightarrow y=\frac{8}{9}$$

$$\frac{x\cdot y\cdot z}{x\cdot y\cdot\sqrt{z}}=\frac{\frac{16}{9}}{\frac{16\sqrt{2}}{27}}\Leftrightarrow\sqrt{z}=\frac{16}{9}\cdot\frac{27}{16\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow z=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x+y+z=\frac{4}{9}+\frac{8}{9}+\frac{9}{2}=\frac{35}{6}\Rightarrow\frac{x+y+z}{x\cdot y\cdot z}=\frac{\frac{35}{6}}{\frac{16}{9}}=\frac{35}{6}\cdot\frac{9}{16}=\frac{105}{32}$$

20) Numa divisão polinomial, o dividendo, o divisor, o quociente e o resto são, respectivamente: $4x^3+ax^2+19x-8$, $2x-b$, $2x^2-5x+7$ e -1. A soma dos valores de $\underline{a}$ e $\underline{b}$ é igual a:

(A) -14
(B) -13
(C) -12
(D) -11
(E) -10

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$4x^3+ax^2+19x-8=(2x-b)\cdot\left(2x^2-5x+7\right)-1$$

$$\Leftrightarrow 4x^3+ax^2+19x-8=4x^3+(-10-2b)x^2+(14+5b)x+(-7b-1)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-10-2b\Leftrightarrow a=-10-2\cdot 1=-12\\ 19=14+5b\\ -8=-7b-1\Leftrightarrow b=1\end{cases}$$

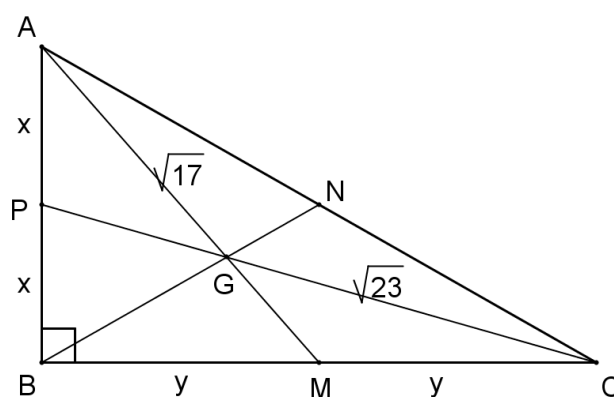
$$\Rightarrow a+b=-12+1=-11$$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1988/1989

1) As medianas traçadas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo medem $\sqrt{17}$ cm e $\sqrt{23}$ cm. A medida da mediana traçada do ângulo reto é:

(A) $5\sqrt{2}$ cm
(B) $4\sqrt{2}$ cm
(C) $3\sqrt{2}$ cm
(D) $2\sqrt{2}$ cm
(E) $\sqrt{2}$ cm

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Sejam $AB = 2x$ e $BC = 2y$, e as medianas $AM = \sqrt{17}$ e $CP = \sqrt{23}$.

Teorema de Pitágoras no ΔABM: $4x^2 + y^2 = 17$

Teorema de Pitágoras no ΔBCP: $x^2 + 4y^2 = 23$

Somando as duas equações acima: $5\left(x^2 + y^2\right) = 40 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8$

Teorema de Pitágoras no ΔABC: $AC^2 = 4x^2 + 4y^2 = 4\left(x^2 + y^2\right) = 4 \cdot 8 = 32 \Leftrightarrow AC = 4\sqrt{2}$

Como a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é metade da hipotenusa, temos:

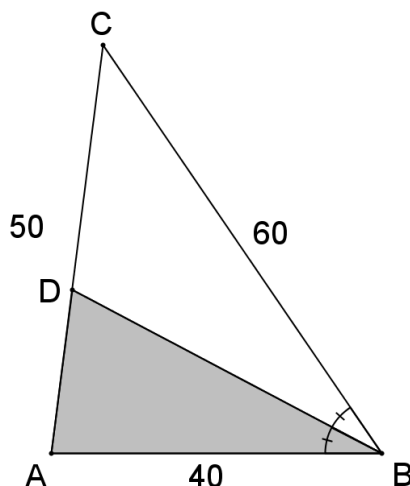
$BN = \frac{AC}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm.

2) Os lados de um triângulo medem $\overline{AB} = 40$, $\overline{AC} = 50$ e $\overline{BC} = 60$. Sendo D a interseção da bissetriz interna do ângulo B com o lado $\overline{AC}$, a área do triângulo ABD é:

(A) $225\sqrt{7}$
(B) $\frac{375}{2}\sqrt{7}$
(C) $150\sqrt{7}$

(D) $125\sqrt{7}$
(E) $75\sqrt{7}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Usando a Fórmula de Heron para calcular a área do ΔABC

$S(ABC)=\sqrt{75(75-60)(75-50)(75-40)}=375\sqrt{7}$

Pelo Teorema das Bissetrizes: $\frac{CD}{60}=\frac{DA}{40}=\frac{CD+DA}{100}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow CD=30 \text{ e } DA=20$

$\frac{S(ABD)}{S(ABC)}=\frac{AD}{AC}=\frac{20}{50}\Leftrightarrow S(ABD)=\frac{2}{5}\cdot 375\sqrt{7}=150\sqrt{7}$

3) Considere as 4 afirmações abaixo. A seguir, coloque (V) ou (F) nos parênteses, conforme sejam verdadeiras ou falsas, e assinale a alternativa correta.

(1) - ( ) Em qualquer trapézio circunscrito a uma circunferência, a medida da base média é a quarta parte do seu perímetro.

(2) - ( ) As diagonais de um trapézio podem se intersectar no seu ponto médio.

(3) - ( ) Todo quadrilátero que tem as diagonais perpendiculares é um losango.

(4) - ( ) Existe quadrilátero plano cujos segmentos das diagonais não se intersectam.

(A) Apenas 2 é verdadeira.
(B) Apenas 3 é verdadeira.
(C) Apenas 3 e 4 são verdadeiras.
(D) 2, 3 e 4 são verdadeiras.
(E) 1 e 4 são verdadeiras.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

(1) - (V) Em qualquer trapézio circunscrito a uma circunferência, a medida da base média é a quarta parte do seu perímetro.

Sejam B e b, ℓ_1 e ℓ_2 as bases e os lados não paralelos de um trapézio circunscrito a um circunferência, então, pelo teorema de Pitot, $B+b=\ell_1+\ell_2$. O perímetro do trapézio é igual a $2p=B+b+\ell_1+\ell_2=2(B+b)$. Assim, a base média é dada por $B_m=\dfrac{B+b}{2}=\dfrac{2(B+b)}{4}=\dfrac{2p}{4}$.

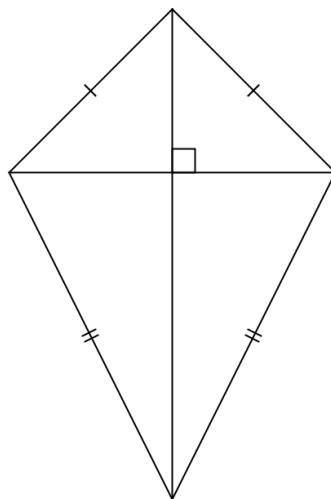
(2) - (F) As diagonais de um trapézio podem se intersectar no seu ponto médio.

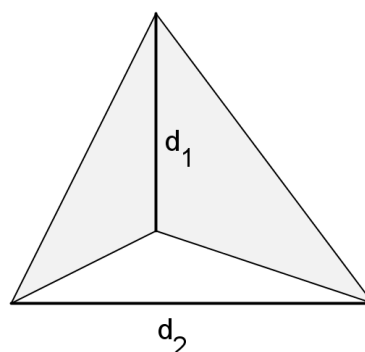
Existe uma controvérsia entre os autores quanto à definição de trapézio. Enquanto alguns os definem como quadriláteros que possuem exatamente um par de lados paralelos; outros os definem como quadriláteros que possuem pelo menos um par de lados paralelos, ou seja, nesse caso, paralelogramos, que possuem dois pares de lados paralelos, seriam considerados trapézios particulares.

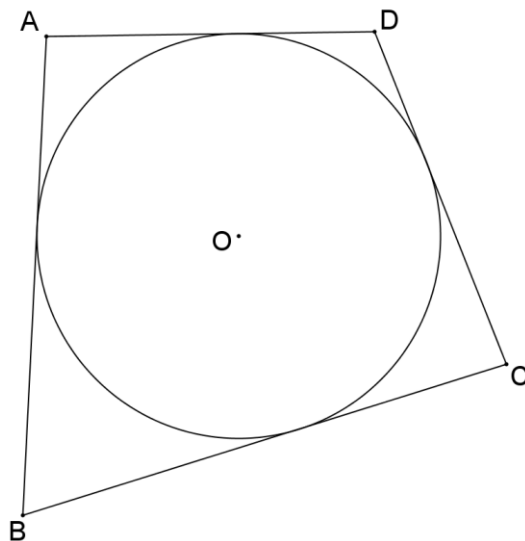
Nesse exercício, vamos adotar a primeira definição, pois caso contrário não haveria alternativa correta.

Se um quadrilátero possui diagonais que cortam-se em seu ponto médio, ele é um paralelogramo e, portanto, não é um trapézio.

(3) - (F) Todo quadrilátero que tem as diagonais perpendiculares é um losango.

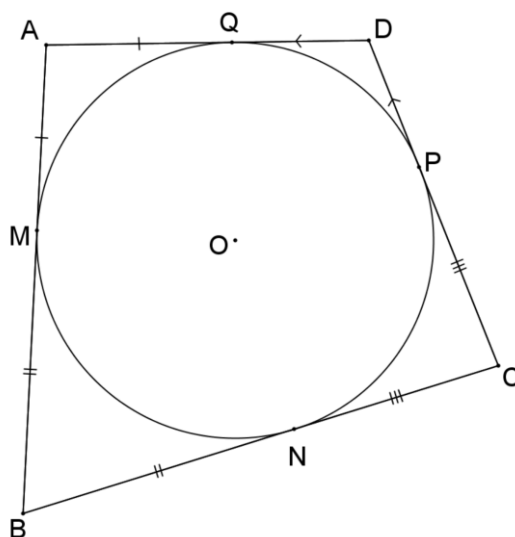
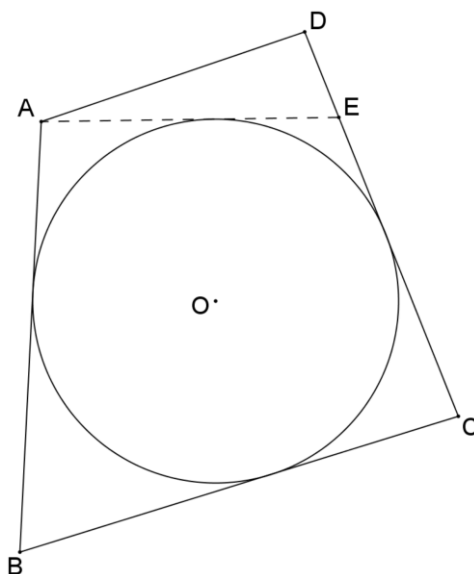
A figura a seguir é um contra exemplo para essa afirmativa.

(4) - (V) Existe quadrilátero plano cujos segmentos das diagonais não se intersectam.

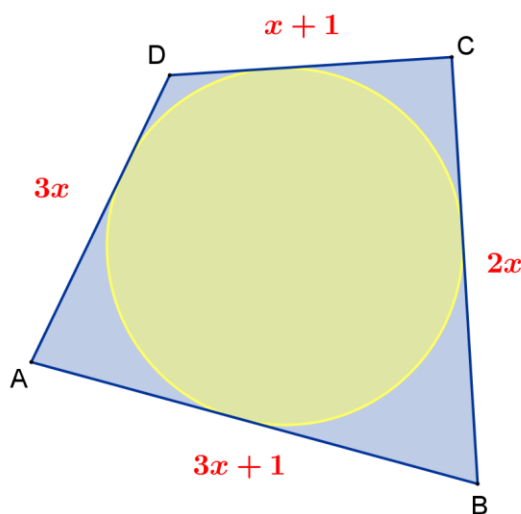
Sim, se considerarmos quadriláteros planos, mas não convexos. A figura a seguir, onde o quadrilátero está sombreado, é um exemplo dessa afirmativa.

NOTA 3: TEOREMA DE PITOT

Um quadrilátero convexo é circunscritível se, e somente se, as somas das medidas dos lados opostos são iguais.

$$\#ABCD \text{ é circunscritível } \Leftrightarrow \overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$$

Demonstração:

Supondo que o quadrilátero $ABCD$ é circunscritível e sejam M, N, P e Q os pontos de tangência dos lados do quadrilátero com a circunferência, então $\overline{AM}=\overline{AQ}$, $\overline{BM}=\overline{BN}$, $\overline{CN}=\overline{CP}$ e $\overline{DP}=\overline{DQ}$.

Logo, $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AQ}+\overline{DQ}+\overline{BN}+\overline{CN}=\overline{AM}+\overline{DP}+\overline{BM}+\overline{CP}=\overline{AB}+\overline{CP}$

Supondo que o quadrilátero $ABCD$ é tal que $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}$. Seja λ a circunferência tangente aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ do $\#ABCD$ e supondo, por absurdo, que λ não é tangente ao lado $\overline{AD}$.

Seja $\overline{AE}$ a outra tangente a λ por A com $E \in \overline{CD}$, então o #ABCE é circunscritível, o que implica $\overline{AB} + \overline{CE} = \overline{BC} + \overline{AE}$. Da hipótese, temos:
$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CE} \pm \overline{DE} = (\overline{BC} + \overline{AE}) \pm \overline{DE} \Leftrightarrow \overline{AD} = \overline{AE} \pm \overline{DE}$
Isso contraria a desigualdade triangular no ΔADE (ABSURDO). Logo, o #ABCD é circunscritível.

Exemplo: Determine o perímetro do quadrilátero circunscritível ABCD da figura.

RESOLUÇÃO:
Como o quadrilátero ABCD é circunscritível, então as somas dos lados opostos são iguais. Assim, temos:
$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD} \Leftrightarrow 3x + 2x = (3x + 1) + (x + 1) \Leftrightarrow x = 2$.
Portanto, o perímetro do quadrilátero é $2p_{ABCD} = (3x + 1) + 2x + (x + 1) + 3x = 9x + 2 = 9 \cdot 2 + 2 = 20$.
****

4) Num grupo de rapazes e moças, 10 moças foram embora e o número de rapazes ficou igual ao número de moças. Após um certo tempo, 24 rapazes foram embora, e o número de moças ficou o quíntuplo do número de rapazes. Podemos afirmar que, inicialmente, havia no grupo
(A) 30 moças
(B) 40 moças
(C) 40 rapazes
(D) 50 rapazes
(E) 60 pessoas

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Sejam x a quantidade inicial de rapazes e y a quantidade inicial de moças, então temos:

$$\begin{cases} x = y - 10 \\ y - 10 = 5 \cdot (x - 24) \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 5x - 120 \Leftrightarrow 4x = 120 \Leftrightarrow x = 30$
$\Rightarrow y = x + 10 = 30 + 10 = 40$
Logo, inicialmente havia 30 rapazes e 40 moças no grupo.

5) Considere as sentenças dadas abaixo:
(I) $3^{5^0} = 1$
(II) $2^{3^{\sqrt{3}}} = 2^{3^{\frac{3}{2}}}$
(III) $-3^{-2} = \frac{1}{9}$
(IV) $81^{\frac{1}{2}} = \pm 9$
Pode-se afirmar que o número de sentenças verdadeiras é
(A) 4
(B) 3
(C) 2
(D) 1
(E) 0

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
(I) FALSA
$3^{5^0} = 3^1 = 3 \neq 1$
(II) FALSA
$2^{3^{\sqrt{3}}} = 2^{3^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow 3^{\sqrt{3}} = 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{3}{2}$
Como as três igualdades são equivalentes e a última igualdade é falsa, então a primeira igualdade também é falsa.

(III) FALSA

$-3^{-2}=-\frac{1}{3^2}=-\frac{1}{9}\neq\frac{1}{9}$

(IV) FALSA

$81^{\frac{1}{2}}=\sqrt{81}=9\neq\pm 9$

Observe que, no conjunto dos números reais, só existem raízes de índice par de números não negativos e elas são, por definição, sempre números não negativos, ou seja, $\sqrt[2n]{x}\geq 0$, onde $n\in\mathbb{N}^*$ e $x\in\mathbb{R}_+$.

6) Sobre o sistema $\begin{cases} x^{-2}+\sqrt[4]{y}=\frac{7}{6} \\ x^{-4}-\sqrt{y}=\frac{7}{36} \end{cases}$ pode-se afirmar que:

(A) é impossível.
(B) é indeterminado.
(C) $x=\frac{1}{2}$
(D) $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$
(E) $y=\frac{1}{16}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Sejam $x^{-2}=a\Leftrightarrow x^{-4}=a^2$ e $\sqrt[4]{y}=b\Leftrightarrow\sqrt{y}=b^2$, então

$$\begin{cases} x^{-2}+\sqrt[4]{y}=\frac{7}{6} \\ x^{-4}-\sqrt{y}=\frac{7}{36} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a+b=\frac{7}{6} \\ a^2-b^2=\frac{7}{36} \end{cases}$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=\frac{7}{36}\Rightarrow\frac{7}{6}\cdot(a-b)=\frac{7}{36}\Leftrightarrow a-b=\frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} a+b=\frac{7}{6} \\ a-b=\frac{1}{6} \end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{2}{3}\ \wedge\ b=\frac{1}{2}$$

Vamos agora encontrar os valores de x e y correspondentes aos valores encontrados para a e b.

$$x^{-2}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\sqrt[4]{y}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$$

Portanto, o conjunto solução é $S=\left\{\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{1}{16}\right);\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{1}{16}\right)\right\}$ e podemos afirmar que $y=\frac{1}{16}$.

7) As raízes da equação $2x^2-x-16=0$ são r e s $(r>s)$. O valor da expressão $\frac{r^4-s^4}{r^3+r^2s+rs^2+s^3}$ é

(A) $\frac{\sqrt{129}}{2}$
(B) $\frac{\sqrt{127}}{2}$
(C) $\frac{127}{4}$
(D) $\frac{129}{4}$
(E) impossível calcular.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$2x^2-x-16=0\Rightarrow|r-s|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{(-1)^2-4\cdot2\cdot(-16)}}{|2|}=\frac{\sqrt{129}}{2}$$

$$r>s\Rightarrow r-s=|r-s|=\frac{\sqrt{129}}{2}$$

$$\frac{r^4-s^4}{r^3+r^2s+rs^2+s^3}=\frac{(r^2+s^2)(r+s)(r-s)}{(r^2+s^2)(r+s)}=r-s=\frac{\sqrt{129}}{2}$$

8) Uma mercadoria que teve dois aumentos sucessivos de 30% e 20% deverá ter um único desconto de $x\%$ para voltar ao preço inicial. Logo

(A) $30<x<35$
(B) $35<x<40$
(C) $45<x<55$
(D) $55<x<65$
(E) $x>65$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Seja P o preço inicial. Após o aumento de 30%, o novo preço é $P\cdot(1+30\%)=1,3\cdot P$. Após o aumento de 20%, o novo preço é $1,3\cdot P\cdot(1+20\%)=1,3\cdot P\cdot1,2=1,56\cdot P$.

O desconto único de $x\%$ para retornar ao preço inicial é dado por

$1,56 \cdot P \cdot (1-x\%) = P \Leftrightarrow 1-x\% = \frac{1}{1,56} \Leftrightarrow x\% = 1 - \frac{1}{1,56} = \frac{0,56}{1,56} \approx 0,36 = 36\%$

Logo, $35 < x < 40$.

9) Cláudio comprou 10 dólares com 125 australes e Marta comprou 5 australes com 120 pesos chilenos. Assim João pode comprar:
(A) 3 dólares com 100 pesos chilenos.
(B) 3000 pesos chilenos com 10 dólares.
(C) 1200 pesos chilenos com 5 dólares.
(D) 800 pesos chilenos com 2 dólares.
(E) 50 dólares com 1000 pesos chilenos.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Se é possível comprar 5 australes com 120 pesos chilenos, então se compram $5 \cdot 25 = 125$ australes com $120 \cdot 25 = 3000$ pesos chilenos.
Dessa forma, conclui-se que 10 dólar, 125 australes e 3000 pesos chilenos têm o mesmo valor, ou seja, João pode comprar 3000 pesos chilenos com 10 dólares.

10) Se $a+b+c=0$, onde a, b e c são números reais diferentes de zero, qual a opção que é uma identidade?
(A) $a^3 - b^3 + c^3 = 3abc$
(B) $a^3 + b^3 + c^3 = -3abc$
(C) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
(D) $a^3 - b^3 - c^3 = -3abc$
(E) $a^2 + b^2 + c^2 = -2abc$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Considerando a identidade de Gauss $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$, temos: $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$.

Demonstração:

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$

$= a^3 + \underline{3a^2b} + \underline{3ab^2} + b^3 + c^3 - \underline{3a^2b} - \underline{3ab^2} - 3abc =$

$= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) =$

$= (a+b+c)\left[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2\right] - 3ab(a+b+c) =$

$= (a+b+c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) =$

$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-ab\right)=$

$=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right]$

11) O valor da expressão $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+10}$ é:

(A) -10
(B) -9
(C) $\frac{1}{9}$
(D) 9
(E) 10

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$S=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+10}=$

$=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)}+\cdots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\left(\sqrt{99}+10\right)\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)}=$

$=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{4}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}+\cdots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\left(\sqrt{100}\right)^2-\left(\sqrt{99}\right)^2}=$

$=\frac{\cancel{\sqrt{2}}-1}{1}+\frac{\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}}{1}+\frac{\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}}}{1}+\cdots+\frac{\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}}}{1}=$

$=\sqrt{100}-1=9$

12) A solução da equação $\sqrt{2+\sqrt[3]{3x-1}}+\sqrt[3]{3x-1}=4$ é:

(A) divisor de 30
(B) múltiplo de 5
(C) fator de 40
(D) múltiplo de 7
(E) divisível por 9

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Efetuando-se a substituição $\sqrt[3]{3x-1}=y$ na equação $\sqrt{2+\sqrt[3]{3x-1}}+\sqrt[3]{3x-1}=4$, temos:
$\sqrt{2+y}+y=4 \Leftrightarrow \sqrt{2+y}=4-y$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2+y}\right)^2=(4-y)^2 \wedge 2+y\geq 0 \wedge 4-y\geq 0$
$\Leftrightarrow 2+y=16-8y+y^2 \wedge y\geq -2 \wedge y\leq 4$
$\Leftrightarrow y^2-9y+14=0 \wedge -2\leq y\leq 4$
$\Leftrightarrow (y=2 \vee y=7) \wedge -2\leq y\leq 4$
$\Leftrightarrow y=2$
Vamos agora encontrar o valor de x correspondente ao valor de y obtido:
$\sqrt[3]{3x-1}=2 \Leftrightarrow 3x-1=2^3 \Leftrightarrow x=3$
Logo, o conjunto solução é $S=\{3\}$ e a solução da equação é um divisor de 30.

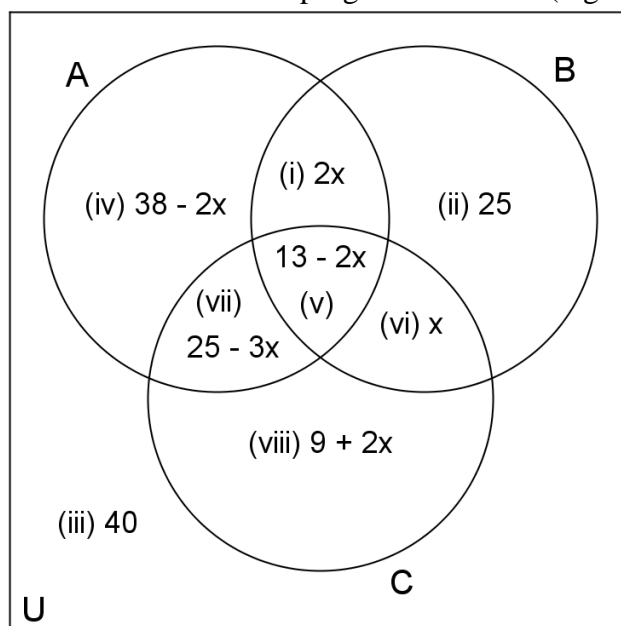
13) Considere as 5 afirmações abaixo. A seguir, coloque (V) ou (F) nos parênteses, conforme sejam verdadeiras ou falsas:
1. ( ) $2,4\text{ h}=2\text{ h }40\text{ min}$
2. ( ) $\frac{6}{5}\text{ km}=1200\text{ dm}$
3. ( ) $0,2\text{ dm}^2=2\text{ m}^2$
4. ( ) $5\,\ell=5000\text{ cm}^3$
5. ( ) $\sqrt[3]{0,008}\text{ m}^2=2000\text{ cm}^2$
Pode-se concluir que são verdadeiras apenas as afirmações:
(A) 1 e 4
(B) 3 e 4
(C) 2, 4 e 5
(D) 4 e 5
(E) 1 e 2

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
1. (F) $2,4\text{h}=2\text{ h}+0,4\text{ h}=2\text{ h}+0,4\cdot 60\text{ min}=2\text{ h }24\text{ min}\neq 2\text{ h }40\text{ min}$
2. (F) $\frac{6}{5}\text{ km}=\frac{6}{5}\cdot 1000\text{ m}=1200\text{ m}=1200\cdot 10\text{ dm}=12000\text{ dm}\neq 1200\text{ dm}$
3. (F) $0,2\text{ dm}^2=0,2\cdot(0,1\text{ m})^2=0,2\cdot 0,01\text{ m}^2=0,002\text{ m}^2\neq 2\text{ m}^2$
4. (V) $5\,\ell=5\text{ dm}^3=5\cdot(10\text{ cm})^3=5\cdot 1000\text{ cm}^3=5000\text{ cm}^3$
5. (V) $\sqrt[3]{0,008}\text{ m}^2=\sqrt[3]{(0,2)^3}\cdot(100\text{ cm})^2=0,2\cdot 10000\text{ cm}^2=2000\text{ cm}^2$
Logo, são verdadeiras apenas as afirmações 4 e 5.

14) Num grupo de 142 pessoas foi feita uma pesquisa sobre três programas de televisão A, B e C e constatou-se que:
I - 40 não assistem a nenhum dos três programas.
II - 103 não assistem ao programa C.
III - 25 só assistem ao programa B.
IV - 13 assistem aos programas A e B.
V - O número de pessoas que assistem somente aos programas B e C é a metade dos que assistem somente a A e B.
VI - 25 só assistem a 2 programas; e
VII - 72 só assistem a um dos programas.
Pode-se concluir que o número de pessoas que assistem
(A) ao programa A é 30
(B) ao programa C é 39
(C) aos 3 programas é 6
(D) aos programas A e C é 13
(E) aos programas A ou B é 63.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
É fácil descobrir a resposta, analisando diretamente a afirmativa II. Vamos, entretanto, tentar identificar a quantidade de elementos em cada região do diagrama a fim de verificar que as outras alternativas estão incorretas.
Vamos representar o resultado da pesquisa em um diagrama de Venn, onde atribuímos o valor $2x$ à quantidade de pessoas que assistem somente aos programas A e B (região (i) do diagrama):

I - 40 não assistem a nenhum dos três programas: colocamos 40 na região (iii).
III - 25 só assistem ao programa B: colocamos 25 na região (ii).
II - 103 não assistem ao programa C: as pessoas que não assistem ao programa C estão nas regiões (i), (ii), (iii) e (iv), então podemos colocar $103-40-25-2x=38-2x$ na região (iv).
IV - 13 assistem aos programas A e B: as pessoas que assistem aos programas A e B estão nas regiões (i) e (v), então podemos colocar $13-2x$ na região (v).

V - O número de pessoas que assistem somente aos programas B e C é a metade dos que assistem somente a A e B: as pessoas que assistem somente aos programas B e C estão na região (vi) e os que assistem somente a A e B estão na região (i), então podemos colocar x na região (vi).
VI - 25 só assistem a 2 programas: as pessoas que só assistem a dois programas estão nas regiões (i), (vi) e (vii), então podemos colocar $25-2x-x=25-3x$ na região (vii).
VII - 72 só assistem a um dos programas: as pessoas que só assistem a um dos programas estão nas regiões (ii), (iv) e (viii), então podemos colocar $72-25-(38-2x)=9+2x$ na região (viii).
Como o grupo todo tem 142 pessoas, então essa é a soma de todas as regiões:
$2x+25+40+(38-2x)+(13-2x)+x+(25-3x)+(9+2x)=142 \Leftrightarrow 150-2x=142 \Leftrightarrow x=4$
Vamos agora analisar as alternativas. Assim, o número de pessoas que assistem
(A) ao programa A é 30 (errada):
$n(A)=(38-2x)+2x+(13-2x)+(25-3x)=76-5x=76-5\cdot 4=56$
(B) ao programa C é 39 (correta):
$n(C)=x+(13-2x)+(25-3x)+(9+2x)=47-2x=47-2\cdot 4=39$
(C) aos 3 programas é 6 (errada):
$n(A\cap B\cap C)=13-2x=13-2\cdot 4=5$
(D) aos programas A e C é 13 (errada):
$n(A\cap C)=(25-3x)+(13-2x)=38-5x=38-5\cdot 4=18$
(E) aos programas A ou B é 63 (errada):
$n(A\cup B)=142-40-(9+2x)=93-2x=93-2\cdot 4=85$

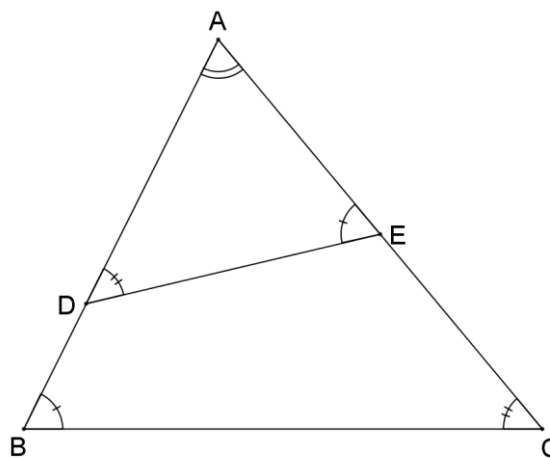
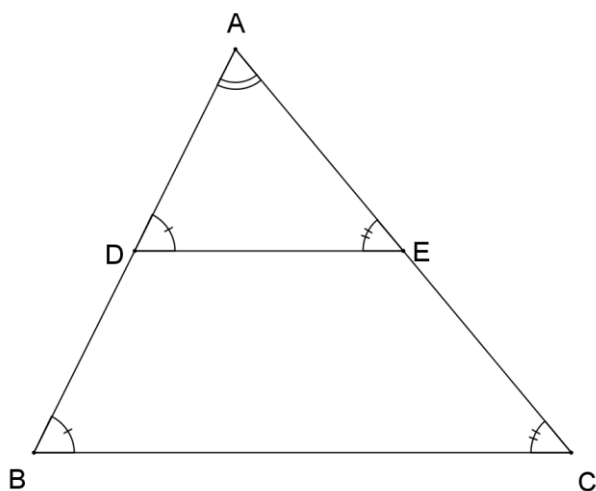
15) Dado o sistema $\begin{cases} mx+ny = 2m+3n \\ px+qy = 2p+3q \end{cases}$ onde $m\cdot n\cdot p\cdot q\neq 0$,
(A) se $mq-np=0$, então o sistema pode ser impossível.
(B) se $mq-np=0$, então o sistema não é indeterminado.
(C) se $mq-np\neq 0$, então o sistema não é determinado.
(D) o sistema não é impossível.
(E) se $mq-np\neq 0$, então o sistema é impossível.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
O sistema é possível e determinado quando $\frac{m}{p}\neq\frac{n}{q}\Leftrightarrow mq\neq np\Leftrightarrow mq-np\neq 0$.
Se $\frac{m}{p}=\frac{n}{q}\Leftrightarrow mq=np\Leftrightarrow mq-np=0$, então temos:
$$\frac{m}{p}=\frac{n}{q}=k\Rightarrow\frac{2m+3n}{2p+3q}=\frac{2\cdot pk+3\cdot qk}{2p+3q}=\frac{k\cdot(2p+3q)}{2p+3q}=k.$$
Assim, se $mq-np=0$, então $\frac{m}{p}=\frac{n}{q}=\frac{2m+3n}{2p+3q}$, o que implica que o sistema é possível e indeterminado.
Portanto, pode-se concluir que o sistema nunca é impossível.

16) Sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC tomam-se os pontos D e E, respectivamente, de modo que os triângulos ABC e ADE sejam semelhantes.
Considere as 4 afirmações abaixo:
(I) $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$
(II) $\hat{B} = \hat{D}$ e $\hat{E} = \hat{C}$
(III) $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$
(IV) Se a razão entre as áreas dos triângulos ABC e ADE é 16, então a razão de semelhança é 4.
Pode-se concluir que o número de afirmações corretas é:
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
1° caso 2° caso

Se os triângulos ABC e ADE são semelhantes, temos duas possibilidades:
1° caso: $\hat{B} = \hat{D}$ e $\hat{C} = \hat{E} \Rightarrow \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$
2° caso: $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{D} \Rightarrow \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$
(I) FALSA: essa afirmação só é verdadeira para ao 1° caso.
(II) FALSA: essa afirmação só é verdadeira para ao 1° caso.
(III) FALSA: essa afirmação só é verdadeira para ao 1° caso.
(IV) VERDADEIRA: a razão entre as áreas de triângulo semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

17) Considere as seguintes afirmações sobre o trinômio $y = -497x^2 + 1988x - 1987$:
(I) Seu valor máximo é 1.
(II) Tem duas raízes de mesmo sinal.
(III) Os valores numéricos para $x = -103$ e $x = 107$ são iguais.
(IV) O gráfico intersecta o eixo das ordenadas em -1987.
Pode-se concluir que o número de afirmações verdadeiras é:
(A) 4
(B) 3
(C) 2
(D) 1
(E) 0

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
$y = -497x^2 + 1988x - 1987$
(I) VERDADEIRA
Como o coeficiente líder é negativo, o vértice é um ponto de máximo do trinômio.
$$x_V = \frac{-1988}{2\cdot(-497)} = 2$$
$y_V = -497\cdot 2^2 + 1988\cdot 2 - 1987 = 1$ (valor máximo)
(II) VERDADEIRA
$$\Delta = 1988^2 - 4\cdot(-497)\cdot(-1987) = 1988^2 - 1988\cdot 1987 = 1988\cdot(1988-1987) = 1988 > 0$$
$$S = \frac{-1988}{-497} = 4 > 0$$
$$P = \frac{-1987}{-497} = \frac{1987}{497} > 0$$
Como o discriminante Δ é positivo, e a soma e o produto das raízes são positivos, então o trinômio possui duas raízes reais distintas e positivas.
(III) VERDADEIRA
As abscissas -103 e 107 equidistam de $x_V = 2$, pois $|-103-2| = |107-2|$, logo esses pontos possuem a mesma ordenada, isto é, o trinômio assume valores iguais em $x = -103$ e $x = 107$.
(IV) VERDADEIRA
A interseção com o eixo das ordenadas é o valor do trinômio quando $x = 0$, que é o seu termo independente -1987.

18) Um polígono regular convexo de 18 vértices $A_1A_2A_3...A_{18}$ está inscrito em uma circunferência de raio R. Traçam-se as diagonais $\overline{A_1A_7}$ e $\overline{A_2A_5}$. A área da parte do círculo compreendida entre essas diagonais é:

(A) $\frac{R^2}{12}\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)$

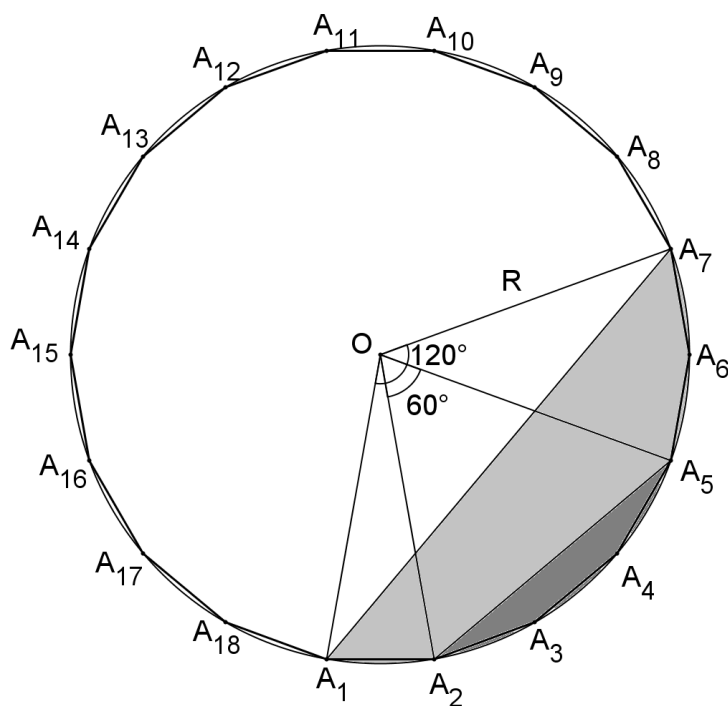
(B) $\frac{\pi R^2}{3}$

(C) $R^2\left(\pi-\sqrt{3}\right)$

(D) $\frac{R^2}{12}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)$

(E) $\frac{\pi R^2}{6}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

A área da parte do círculo compreendida entre as diagonais $\overline{A_1A_7}$ e $\overline{A_2A_5}$ é igual à diferença entre a área de um segmento circular de 120° e um segmento circular de 60° em uma circunferência de raio R. Assim, temos:

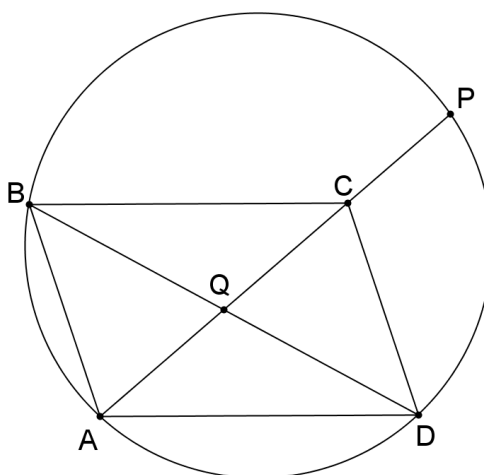
$$S=S_{seg.120^\circ}-S_{seg.60^\circ}=\left(\frac{\pi R^2}{3}-\frac{R\cdot R}{2}\operatorname{sen}120^\circ\right)-\left(\frac{\pi R^2}{6}-\frac{R\cdot R}{2}\operatorname{sen}60^\circ\right)=$$

$$=\left(\frac{\pi R^2}{3}-\frac{R\cdot R}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\pi R^2}{6}-\frac{R\cdot R}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi R^2}{6}.$$

19) Considere as cordas $\overline{AP}=13$ e $\overline{BD}=12$ de uma circunferência, que se intersectam no ponto Q; e um ponto C no interior da corda $\overline{AP}$, tal que $ABCD$ seja um paralelogramo. Determinado este ponto C, $\overline{AC}$ mede

(A) 8
(B) 9
(C) 10
(D) 12
(E) 18

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Como ABCD é um paralelogramo, então $\overline{BQ}=\overline{QD}=\frac{\overline{BD}}{2}=6$ e $\overline{AQ}=\overline{QC}=x$.

Logo, $PQ=AP-AQ=13-x$.

Considerando a potência do ponto Q em relação ao círculo, temos:

$\overline{AQ}\cdot\overline{QP}=\overline{BQ}\cdot\overline{QD}\Rightarrow x\cdot(13-x)=6\cdot 6\Leftrightarrow x^2-13x+36=0\Leftrightarrow x=4 \ \vee \ x=9$

Mas, $\overline{AC}=2x<\overline{AP}=13\Rightarrow x=4\Rightarrow\overline{AC}=8$.

20) Um subconjunto do conjunto solução da inequação $\frac{1+4x-x^2}{x^2+1}>0$ é:

(A) $\{x\in\mathbb{R}\mid x>5\}$
(B) $\{x\in\mathbb{R}\mid x<2\}$
(C) $\{x\in\mathbb{R}\mid x<0\}$
(D) $\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<4\}$
(E) $\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x<3\}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Como $x^2+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$, então $\frac{1+4x-x^2}{x^2+1}>0 \Leftrightarrow 1+4x-x^2>0$.

O gráfico do trinômio do 2° grau $y=1+4x-x^2$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo, então assumirá valores positivos entre as suas raízes. As raízes desse trinômio são $x=\frac{-4\pm\sqrt{16+4}}{-2}=2\pm\sqrt{5}$. Portanto, $-x^2+4x+1>0 \Rightarrow 2-\sqrt{5}<x<2+\sqrt{5}$.

Assim, o conjunto solução da inequação $\frac{1+4x-x^2}{x^2+1}>0$ é $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2-\sqrt{5}<x<2+\sqrt{5}\right\}$.

Como $2-\sqrt{5}<0<4<2+\sqrt{5}$, então $\{x \in \mathbb{R} \mid 0<x<4\} \subset S$.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1987/1988

1) Sendo a e b números inteiros quaisquer, $R = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, b \neq 0\right\}$ e $S = \{2; 1,3; 0,444\ldots; \sqrt{2}\}$ então:

(A) $S \subset R$.
(B) $S \cap R = \varnothing$.
(C) $S \cap R$ é unitário.
(D) $S \cap R$ tem dois elementos.
(E) $S - R$ é unitário.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
O conjunto R é o conjunto dos números racionais.
Como $\sqrt{2} \in S$ é irracional, então $S \not\subset R$.
Como $2 \in \mathbb{Z}$, $1,3 = \frac{13}{10} \in \mathbb{Q}$ e $0,444\ldots = \frac{4}{9} \in \mathbb{Q}$, então $S \cap R = \{2; 1,3; 0,444\ldots\}$, ou seja, $S \cap R$ possui três elementos.
Como $S - R = \{x \mid x \in S \wedge x \notin R\} = \{\sqrt{2}\}$, então $S - R$ é unitário.

2) a e b são números reais diferentes de zero e $a - b > 0$, então, necessariamente
(A) $a^2 > b^2$
(B) $\frac{a}{b} > 1$
(C) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$
(D) $a - 2 < b - 2$
(E) $1 - a < 1 - b$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
(A) $a^2 > b^2$ (FALSA)
Contraexemplo: $a = 1 \wedge b = -2 \Rightarrow a - b = 1 - (-2) = 3 > 0 \wedge a^2 = 1 < 4 = b^2$
(B) $\frac{a}{b} > 1$ (FALSA)
Contraexemplo: $a = 1 \wedge b = -1 \Rightarrow a - b = 1 - (-1) = 2 > 0 \wedge \frac{a}{b} = -1 < 1$
(C) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ (FALSA)
Contraexemplo: $a = 1 \wedge b = -1 \Rightarrow a - b = 1 - (-1) = 2 > 0 \wedge \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{1}{-1} + \frac{-1}{1} = -2 < 1$
(D) $a - 2 < b - 2$ (FALSA)

$a-b>0 \Leftrightarrow a>b \Leftrightarrow a-2>b-2$

(E) $1-a<1-b$ (VERDADEIRA)

$a-b>0 \Leftrightarrow a>b \Leftrightarrow -a<-b \Leftrightarrow 1-a<1-b$

3) A soma dos algarismos na base 10 de $\left(10^{n^3}+3\right)^2$, onde n é um número inteiro positivo é:

(A) 16

(B) 13

(C) 13n

(D) n^3+3n

(E) n^6+2n^3+1

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$\left(10^{n^3}+3\right)^2=\left(10^{n^3}\right)^2+6\cdot 10^{n^3}+9=10^{2n^3}+6\cdot 10^{n^3}+9=1\underbrace{000\ldots000}_{\left(n^3-1\text{ zeros}\right)}6\underbrace{000\ldots000}_{\left(n^3-1\text{ zeros}\right)}9$$

Portanto, a soma dos algarismos de $\left(10^{n^3}+3\right)^2$ é $1+6+9=16$.

4) Dois capitais são empregados a uma mesma taxa de 3% ao ano. A soma dos capitais é igual a R\$ 50.000,00. Cada capital produz R\$ 600,00 de juros. O primeiro permaneceu empregado 4 meses a mais que o segundo. O segundo capital foi empregado durante

(A) 6 meses.

(B) 8 meses.

(C) 10 meses.

(D) 2 anos.

(E) 3 anos.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

A taxa de juros de 3% ao ano equivale a uma taxa de $\frac{3}{12}\%=\frac{1}{4}\%$ ao mês.

Sejam x e y os capitais aplicados durante $(t+4)$ e t meses, respectivamente, então os juros produzidos pelos dois capitais são dados por:

$$J_x=x\cdot\frac{1}{4}\%\cdot(t+4)=600 \Leftrightarrow x=\frac{240000}{t+4}$$

$$J_y=y\cdot\frac{1}{4}\%\cdot t=600 \Leftrightarrow y=\frac{240000}{t}$$

Como a soma dos dois capitais é R\$ 50.000,00, então

$$x+y=\frac{240000}{t+4}+\frac{240000}{t}=50000 \Leftrightarrow 24t+24(t+4)=5t(t+4) \Leftrightarrow 5t^2-28t-96=0$$

$$\Leftrightarrow t=-\frac{12}{5}\ (\text{não convém}) \vee\ t=8$$

Portanto, o segundo capital foi empregado durante 8 meses.

5) Dados os conjuntos M, N e P tais que $N \subset M$, $n(M \cap N)=60\% \cdot n(M)$, $n(N \cap P)=50\% \cdot n(N)$, $n(M \cap N \cap P)=40\% \cdot n(P)$ e $n(P)=x\% \cdot n(M)$. O valor de x é:

OBS.: $n(A)$ indica o número de elementos do conjunto A.

(A) 80
(B) 75
(C) 60
(D) 50
(E) 45

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$N \subset M \Rightarrow n(M \cap N)=n(N)=60\% \cdot n(M)=0,6 \cdot n(M)$$

$$n(N \cap P)=50\% \cdot n(N)=0,5 \cdot n(N)=0,5 \cdot 0,6 \cdot n(M)=0,3 \cdot n(M)$$

$$N \subset M \Rightarrow M \cap N \cap P=N \cap P \Rightarrow n(M \cap N \cap P)=n(N \cap P)$$

$$\Rightarrow 0,4 \cdot n(P)=0,3 \cdot n(M) \Leftrightarrow n(P)=0,75 \cdot n(M)=75\% \cdot n(M)$$

Logo, $x=75$.

6) O denominador racionalizado de $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}+1}$ é:

(A) 10
(B) 8
(C) 4
(D) 3
(E) 2

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}+1}=\frac{1}{\sqrt[4]{12}+\left(\sqrt{3}+1\right)}\cdot\frac{\sqrt[4]{12}-\sqrt{3}-1}{\sqrt[4]{12}-\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\sqrt[4]{12}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{12}-\left(3+2\sqrt{3}+1\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{12}-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-4-2\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12}}{4}$$

7) Simplificando-se a expressão $\frac{(6\times 12\times 18\times\cdots\times 300)}{(2\times 6\times 10\times 14\times\cdots\times 98)\times(4\times 8\times 12\times 16\times\cdots\times 100)}$ obtém-se:

(A) 3^{50}
(B) $\frac{3}{2}$
(C) $\left(\frac{3}{2}\right)^{25}$
(D) $\frac{3}{4}$
(E) 2^{25}

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$\frac{(6\times 12\times 18\times\cdots\times 300)}{(2\times 6\times 10\times 14\times\cdots\times 98)\times(4\times 8\times 12\times 16\times\cdots\times 100)} =$$

$$\frac{(6\times 1\times 6\times 2\times 6\times 3\times\cdots\times 6\times 50)}{(2\times 1\times 2\times 3\times 2\times 5\times 2\times 7\times\cdots\times 2\times 49)\times(2\times 2\times 2\times 4\times 2\times 6\times 2\times 8\times\cdots\times 2\times 50)} =$$

$$= \frac{6^{50}\times(1\times 2\times 3\times\cdots\times 50)}{2^{50}\times(1\times 2\times 3\times\cdots\times 50)} = \left(\frac{6}{2}\right)^{50} = 3^{50}$$

8) O conjunto dos valores de m para os quais as equações $3x^2-8x+2m=0$ e $2x^2-5x+m=0$ possuem uma e apenas uma raiz real comum é
(A) unitário, de elemento positivo.
(B) unitário, de elemento não negativo.
(C) composto de dois elementos não positivos.
(D) composto de dois elementos não negativos.
(E) vazio.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Se as equações possuem apenas uma raiz real comum, então ambas devem ter discriminante positivo.

$$3x^2-8x+2m=0 \Rightarrow \Delta=(-8)^2-4\cdot 3\cdot 2m=64-24m>0 \Leftrightarrow m<\frac{64}{24}=\frac{8}{3}$$

$$2x^2-5x+m=0 \Rightarrow \Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot m=25-8m>0 \Leftrightarrow m<\frac{25}{8}$$

Assim, devemos ter $m<\frac{8}{3}$.

Se dividirmos $3x^2-8x+2m$ por $2x^2-5x+m$, o resto $R(x)$ obtido se anula para o valor da raiz comum. Assim, temos:

$$\begin{array}{rl} 3x^2 \quad -8x \quad +2m & \underline{|\, 2x^2-5x+m} \\ \underline{-3x^2+7,5x-1,5m} & 1,5 \\ / \quad -0,5x+0,5m & \end{array}$$

Portanto, $R(x) = -\frac{x}{2} + \frac{m}{2}$ e a raiz comum deve ser igual a m.

Se m é raiz comum das equações $3x^2 - 8x + 2m = 0$ e $2x^2 - 5x + m = 0$, então deve ser raiz de cada uma das equações. Assim, temos:

$3m^2 - 8m + 2m = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = 2$

$2m^2 - 5m + m = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = 2$

Se $m = 0$, as equações resultantes são $3x^2 - 8x = 0$ (raízes 0 e $8/3$) e $2x^2 - 5x = 0$ (raízes 0 e $5/2$).

Se $m = 2$, as equações resultantes são $3x^2 - 8x + 4 = 0$ (raízes 2 e $2/3$) e $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (raízes 2 e $1/2$).

Portanto, $m \in \{0, 2\}$ que é um conjunto composto de dois elementos não negativos.

9) O sistema $\begin{cases} x^2 - \sqrt{5}y = 8000 \\ 0,001x - y = 5000 \end{cases}$:

(A) tem apenas uma solução (x, y), $x < 0$ e $y < 0$.

(B) tem apenas uma solução (x, y), $x > 0$ e $y < 0$.

(C) tem apenas uma solução (x, y), $x < 0$ e $y > 0$.

(D) tem duas soluções.

(E) não tem soluções.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} x^2 - \sqrt{5}y = 8000 \\ 0,001x - y = 5000 \end{cases}$$

Da segunda equação vem: $0,001x - y = 5000 \Leftrightarrow y = \frac{x}{1000} - 5000$.

Substituindo a expressão obtida na primeira equação, tem-se:

$$x^2 - \sqrt{5} \cdot \left(\frac{x}{1000} - 5000 \right) = 8000 \Leftrightarrow x^2 - \frac{\sqrt{5}}{1000} x + \left(5000\sqrt{5} - 8000 \right) = 0$$

A equação obtida tem discriminante

$$\Delta = \left(-\frac{\sqrt{5}}{1000} \right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(5000\sqrt{5} - 8000 \right) = \frac{1}{40000} - 4000\left(5\sqrt{5} - 8 \right) < 0.$$

Logo, não possui raízes reais.

Consequentemente, o sistema não possui solução.

10) Num sistema S de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, x e y, os coeficientes de x e y de uma das equações são, respectivamente, proporcionais aos coeficientes de x e de y da outra. Logo, o conjunto solução de S:
(A) é unitário.
(B) é infinito.
(C) é vazio.
(D) pode ser vazio.
(E) pode ser unitário.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Seja o sistema S de duas equações do 1º grau com duas incógnitas $S:\begin{cases} ax+by=c \\ Ax+By=C \end{cases}$.

1º caso: Se $\frac{a}{A}\neq\frac{b}{B}$, então o sistema é possível e determinado, e seu conjunto solução é unitário.

2º caso: Se $\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}$, o sistema é possível e indeterminado, e seu conjunto solução possui infinitos elementos.

3º caso: Se $\frac{a}{A}=\frac{b}{B}\neq\frac{c}{C}$, o sistema é impossível e seu conjunto solução é vazio.

É dado que $\frac{a}{A}=\frac{b}{B}$, então o conjunto solução de S pode ter infinitos elementos ou pode ser vazio. Portanto, a alternativa correta é a letra D.
Note que a proporcionalidade entre os coeficientes de x e y indica que as equações representam duas retas paralelas. No 2º caso, as retas são paralelas e coincidentes e, no 3º caso, as retas são paralelas distintas.

11) A equação do 2º grau $x^2-2x+m=0$, $m<0$, tem raízes x_1 e x_2. Se $x_1^{n-2}+x_2^{n-2}=a$ e $x_1^{n-1}+x_2^{n-1}=b$, então $x_1^n+x_2^n$ é igual a:
(A) $2a+mb$
(B) $2b-ma$
(C) $ma+2b$
(D) $ma-2b$
(E) $m(a-2b)$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Seja $S_k=x_1^k+x_2^k$, então, pela fórmula de Newton, temos $S_n-2\cdot S_{n-1}+m\cdot S_{n-2}=0$.

Do enunciado, vem $S_{n-2}=a$ e $S_{n-1}=b$, logo $S_n-2\cdot b+m\cdot a=0 \Leftrightarrow S_n=x_1^n+x_2^n=2b-ma$.

12) No processo da divisão do polinômio $P(x)$, de coeficientes não nulos, pelo polinômio $g(x)$, obteve-se, para quociente um polinômio do 4^o grau e, para penúltimo resto, um polinômio do 2^o grau. Considerando-se as afirmativas:

I) O grau de $P(x)$ é 6.

II) O grau de $g(x)$ pode ser 1.

III) $P(x)$ é composto de 7 monômios.

Conclui-se que:

(A) apenas I é verdadeira.
(B) apenas III é falsa.
(C) apenas II é verdadeira.
(D) apenas I e III são verdadeiras.
(E) todas são falsas.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
A divisão de polinômios é tal que o dividendo é o divisor vezes o quociente mais o resto, onde o grau do resto não supera o grau do divisor.
Se o penúltimo resto é do 2^o grau, então o grau do divisor $g(x)$ é menor ou igual a 2. Assim, o grau de $g(x)$ pode ser 1 ou 2.
Como o quociente é do 4^o grau, o grau do dividendo é a soma do grau do divisor com o do quociente, ou seja, o grau do dividendo $P(x)$ é 5 ou 6.
I) Falsa, pois o grau de $P(x)$ pode ser 5 ou 6.
II) Verdadeira.
III) Falsa, pois isso só ocorre no caso de $P(x)$ ser de grau 6.
Veja exemplos das duas situações possíveis:

$$\begin{array}{rl|l} & x^5+x^4+x^3+2x^2+x+1 & x+1 \\ \cline{3-3} & -x^5-x^4 & x^4+x^2+x \\ \cline{1-2} & x^3+2x^2+x+1 & \\ & -x^3-x^2 & \\ \cline{1-2} & x^2+x+1 & \\ & -x^2-x & \\ \cline{1-2} & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^6+x^5+x^4+x^3+2x^2+x+1 & x^2+x+1 \\ \underline{-x^6-x^5-x^4} & x^4+x+1 \\ \quad x^3+2x^2+x+1 & \\ \quad \underline{-x^3-x^2-x} & \\ \quad\quad x^2+1 & \\ \quad\quad \underline{-x^2-x-1} & \\ \quad\quad\quad -x & \end{array}$$

13) Considere os números reais $x-a$, $x-b$ e $x-c$; onde a, b e c são constantes. Qual o valor de x para que a soma de seus quadrados seja a menor possível?

(A) $\dfrac{a+b+c}{2}$

(B) $\dfrac{a+b+c}{3}$

(C) $\dfrac{2a+2b+2c}{3}$

(D) $\dfrac{a-b-c}{3}$

(E) $\dfrac{2a-2b+2c}{3}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Seja $f(x)=(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=3x^2-2(a+b+c)x+(a^2+b^2+c^2)$ a soma dos quadrados dos números $x-a$, $x-b$ e $x-c$.

A função f é uma função quadrática com coeficiente do termo do 2° grau positivo e, portanto, tem ponto de mínimo. Esse valor mínimo ocorre no vértice da parábola, ou seja, para $x=x_V=-\dfrac{-2(a+b+c)}{2\cdot 3}=\dfrac{a+b+c}{3}$.

Observe que o valor de x que minimiza a soma dos quadrados de $x-a$, $x-b$ e $x-c$ (chamado comumente de erro quadrático médio) é a média aritmética dos números a, b e c.

14) Simplificando a expressão $\sqrt{1+\left(\frac{x^4-1}{2x^2}\right)^2}-\frac{x^2}{2}$, para $x \in \mathbb{R}^*$, obtém-se:

(A) $\frac{1}{2x^2}$

(B) $\frac{x^4+x^2-1}{2x^2}$

(C) $\frac{x^4-x^2-1}{2x^2}$

(D) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$

(E) $\frac{x^2}{\sqrt{2}}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$\sqrt{1+\left(\frac{x^4-1}{2x^2}\right)^2}-\frac{x^2}{2}=\sqrt{1+\frac{x^8-2x^4+1}{4x^4}}-\frac{x^2}{2}=\sqrt{\frac{4x^4+x^8-2x^4+1}{4x^4}}-\frac{x^2}{2}=$$

$$=\sqrt{\frac{x^8+2x^4+1}{4x^4}}-\frac{x^2}{2}=\sqrt{\left(\frac{x^4+1}{2x^2}\right)^2}-\frac{x^2}{2}=\left|\frac{x^4+1}{2x^2}\right|-\frac{x^2}{2}=\frac{x^4+1}{2x^2}-\frac{x^4}{2x^2}=\frac{1}{2x^2}$$

15) Considere o quadrilátero ABCD onde $\text{med}(\overline{AB})=5\text{ cm}$, $\text{med}(\overline{BC})=7,5\text{ cm}$, $\text{med}(\overline{CD})=9\text{ cm}$, $\text{med}(\overline{AD})=4\text{ cm}$ e $\text{med}(\overline{BD})=6\text{ cm}$. O ângulo $A\hat{B}C$ deste quadrilátero é igual a:

(A) $B\hat{C}D+\frac{A\hat{D}C}{2}$

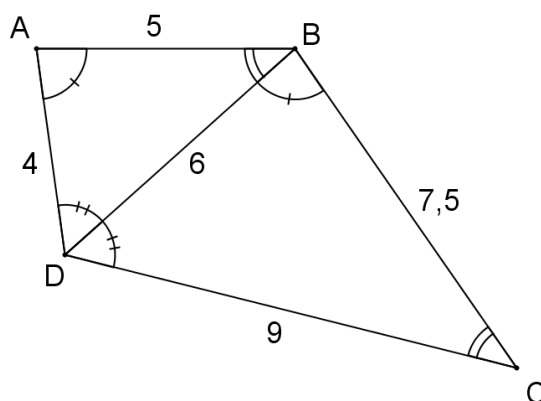
(B) $B\hat{A}D+A\hat{D}C-B\hat{C}D$

(C) $B\hat{A}D+B\hat{C}D$

(D) $2\cdot B\hat{C}D+A\hat{D}C$

(E) $A\hat{D}C+2\cdot B\hat{A}C-B\hat{C}D$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{CD}=\frac{2}{3}\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta BCD \Rightarrow \begin{cases} A\hat{B}D = B\hat{C}D \\ A\hat{D}B = B\hat{D}C \\ B\hat{A}D = C\hat{B}D \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ A\hat{B}C = B\hat{C}D + B\hat{A}D$$

16) O vértice E de um triângulo equilátero ABE está no interior de um quadrado $ABCD$ e F é o ponto de interseção da diagonal $\overline{BD}$ e o lado $\overline{AE}$. Se a medida de $\overline{AB}$ é igual a $\sqrt{1+\sqrt{3}}$, então a área do triângulo BEF é:

(A) $\sqrt{3}-\frac{3}{4}$

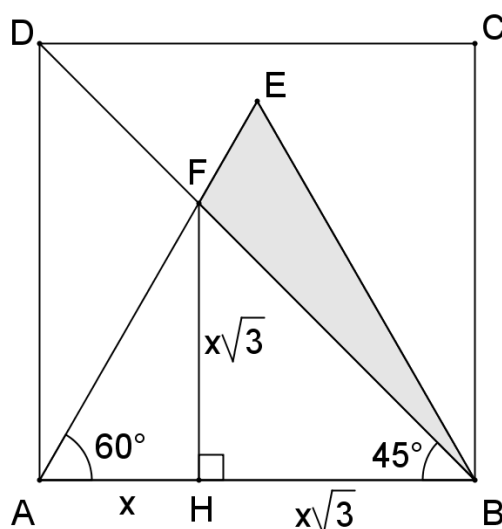
(B) $1-\frac{\sqrt{3}}{4}$

(C) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

(E) $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Seja $FH \perp AB$ e $AH = x$, então, no triângulo retângulo, AHF temos $FH = AH \cdot \text{tg}\, 60^\circ = x\sqrt{3}$ e , no triângulo retângulo isósceles BHF, temos $BH = FH = x\sqrt{3}$.

Assim, se o lado do quadrado $ABCD$ é $AB = x\left(\sqrt{3}+1\right)$, a área do triângulo ABF é dada por

$$S_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot x\left(\sqrt{3}+1\right) \cdot x\sqrt{3} = \frac{x^2}{2} \cdot \left(3+\sqrt{3}\right)$$

A área do triângulo BEF é igual a diferença entre a área do triângulo equilátero ABE e a área do triângulo ABF. Assim, temos:

$$S_{BEF} = S_{ABE} - S_{ABF} = x^2\left(\sqrt{3}+1\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{x^2}{2} \cdot \left(3+\sqrt{3}\right) = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$$

No caso em análise $AB = x\left(\sqrt{3}+1\right) = \sqrt{1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+1} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$,

então a área pedida é igual a $S_{BEF} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$ unidades de área.

17) Por um ponto P exterior a um círculo de centro O e raio $R = 1\,\text{cm}$, traça-se uma secante que intersecta a circunferência do círculo dado nos pontos A e B, nesta ordem. Traça-se pelo ponto A uma paralela à reta $\overleftrightarrow{PO}$ que intersecta a mesma circunferência no ponto C. Sabendo que o ângulo $O\hat{P}A$ mede 15°, o comprimento do menor arco BC, em centímetros, é:

(A) $\dfrac{\pi}{12}$

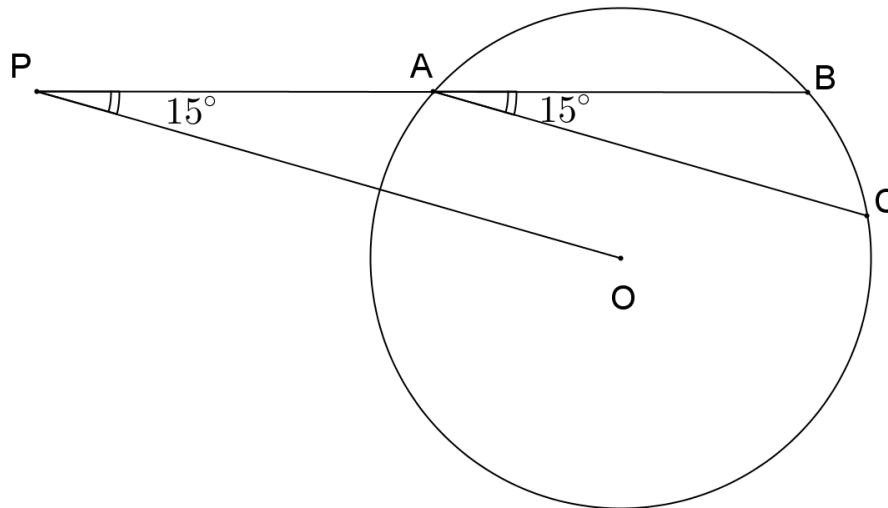
(B) $\dfrac{\pi}{6}$

(C) $\dfrac{\pi}{4}$

(D) $\dfrac{\pi}{3}$

(E) $\frac{5\pi}{12}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$\overline{AC} \parallel \overline{PO} \Rightarrow B\hat{A}C = A\hat{P}O = 15^\circ \Rightarrow BC = 2 \cdot A\hat{P}O = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$

Assim, o comprimento do menor arco $BC = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad é dado por $\frac{\pi}{6} \cdot 1 = \frac{\pi}{6}$ cm.

18) Um polígono regular tem vinte diagonais. A medida, em graus, de um de seus ângulos internos é:
(A) 201º
(B) 167º
(C) 162º
(D) 150º
(E) 135º

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$D = \frac{n(n-3)}{2} = 20 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 40 = 0 \Leftrightarrow n = -5 \text{ (não convém)} \vee n = 8$$

$$\hat{A}_i = \frac{180^\circ (n-2)}{n} = \frac{180^\circ \cdot (8-2)}{8} = 135^\circ$$

19) Um triângulo retângulo de perímetro $2p$ está inscrito num círculo de raio R e circunscrito a um círculo de raio r. Uma expressão que dá a altura relativa à hipotenusa do triângulo é:

(A) $\frac{pr}{R}$

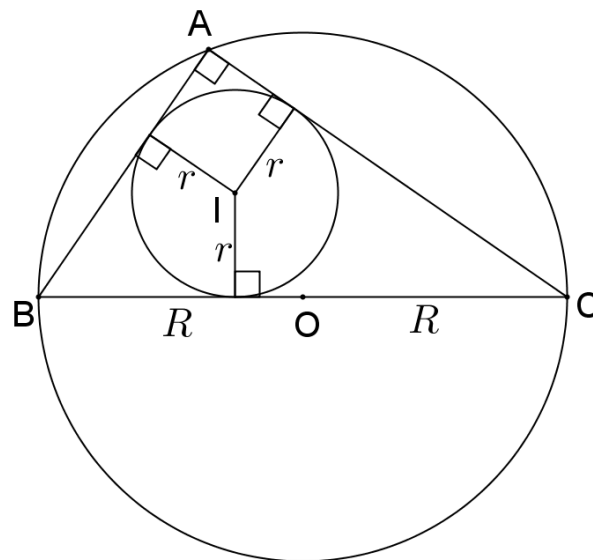
(B) $\frac{p+r}{R}$

(C) $\frac{R}{pr}$

(D) $\frac{R}{p+r}$

(E) $\frac{2pr}{R}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência de raio R tem hipotenusa $a = 2R$.
Escrevendo a área do triângulo de duas formas diferentes, onde h é a altura relativa à hipotenusa, temos:

$S = p \cdot r = \frac{a \cdot h}{2} \Leftrightarrow h = \frac{2pr}{a} = \frac{2pr}{2R} = \frac{pr}{R}$.

20) Uma expressão que dá o lado do eneágono regular, em função das diagonais a, b e c, com $a < b < c$, é:

(A) $\frac{c^2 + b^2}{a}$

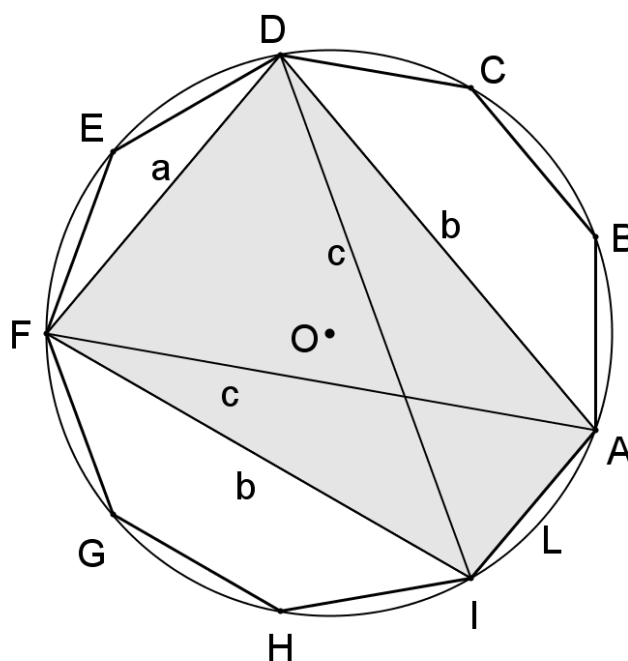
(B) $\frac{cb}{a}$

(C) $\frac{c^2 - b^2}{a}$

(D) $\frac{(c+b)^2}{a}$

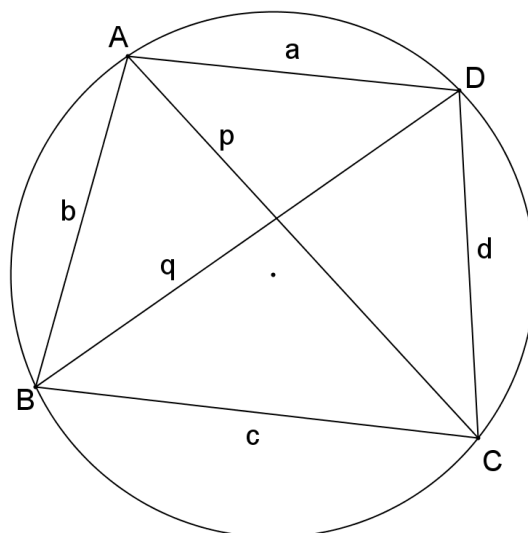
(E) $\frac{(c-b)^2}{a}$

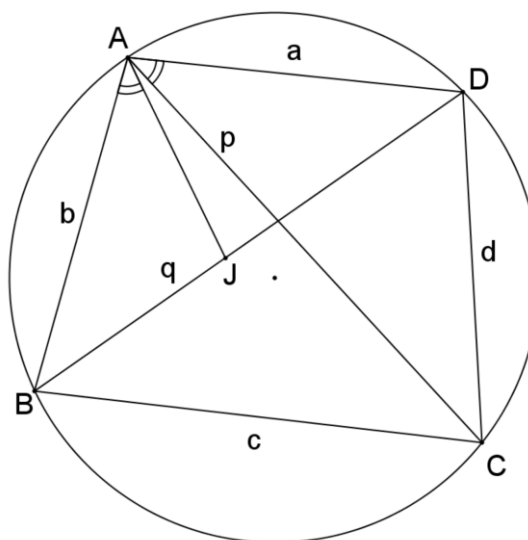
RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero inscritível $ADFI$, temos:

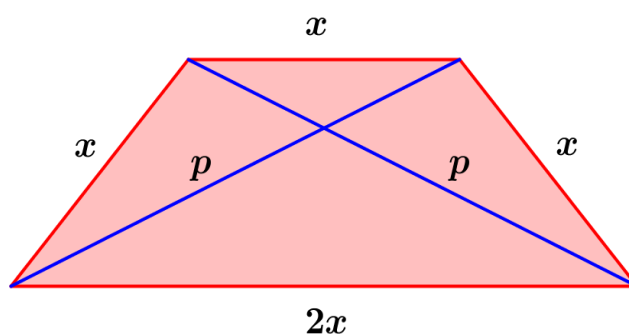
$a \cdot L + b \cdot b = c \cdot c \Leftrightarrow L = \frac{c^2 - b^2}{a}$.

NOTA 4: RELAÇÕES MÉTRICAS NOS QUADRILÁTEROS INCRITÍVEIS

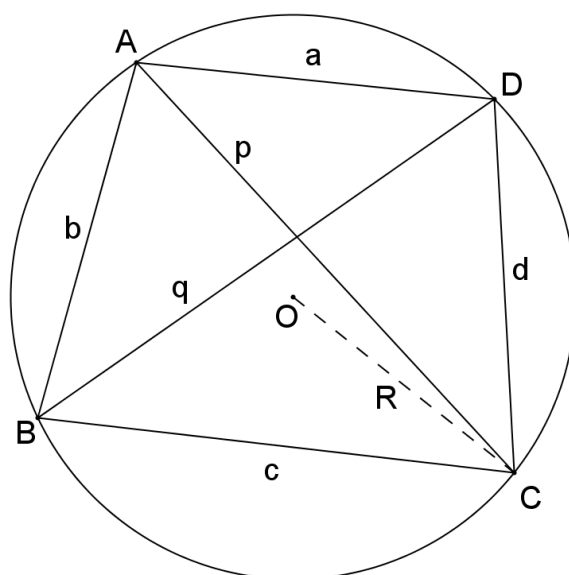
Teorema de Ptolomeu
Em um quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

$$ac + bd = pq$$

Demonstração:

No quadrilátero ABCD, seja AJ isogonal de AC, então:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta AJD \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{DJ}{BC} = \dfrac{AD}{AC} \Leftrightarrow \dfrac{DJ}{c} = \dfrac{a}{p} \\ \Delta AJB \sim \Delta ADC \Rightarrow \dfrac{BJ}{CD} = \dfrac{AB}{AC} \Leftrightarrow \dfrac{BJ}{d} = \dfrac{b}{p}\end{array}\right\} \Rightarrow BJ + DJ = \dfrac{ac + bd}{p} \Leftrightarrow ac + bd = pq$$

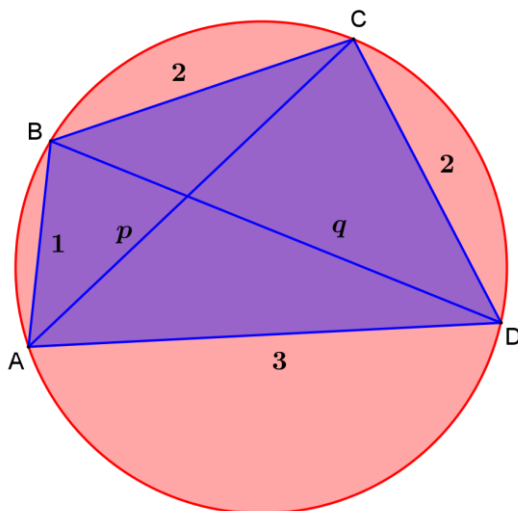
Exemplo: Calcule o comprimento das diagonais do trapézio isósceles da figura.

Observemos inicialmente que todo trapézio isósceles é inscritível. Assim, aplicando o teorema de Ptolomeu, temos: $x \cdot 2x + x \cdot x = p \cdot p \Leftrightarrow p^2 = 3x^2 \Leftrightarrow p = x\sqrt{3}$.

Teorema de Hiparco

Em um quadrilátero inscritível, a razão entre as diagonais é igual à razão entre as somas dos produtos dos lados que concorrem as respectivas diagonais.

$$\frac{p}{q} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$$

Demonstração:

$$S_{BAC} + S_{DAC} = S_{ABD} + S_{CBD} \Leftrightarrow \frac{bcp}{4R} + \frac{adp}{4R} = \frac{abq}{4R} + \frac{cdq}{4R} \Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$$

Exemplo: Calcule a menor diagonal do quadrilátero inscritível ABCD cujos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ medem, respectivamente, 1, 2, 2 e 3.

Aplicando o teorema de Ptolomeu, temos: $p \cdot q = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \Leftrightarrow pq = 8 \Leftrightarrow q = \frac{8}{p}$

Aplicando o teorema de Hiparco, temos: $\frac{p}{q} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3} \Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{7}{8}$

$$\frac{p}{q} = \frac{7}{8} \wedge q = \frac{8}{p} \Rightarrow \frac{p}{(8/p)} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow p^2 = 7 \Leftrightarrow p = \sqrt{7} \ \wedge \ q = \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

Logo, a menor diagonal do quadrilátero é $\sqrt{7}$.

****

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1986/1987

1) Considere três números naturais x, y e z, tais que $x < y < z$. Sabe-se que o maior é a soma dos outros dois e que o menor é um quinto do maior. Então x, y e z são, nesta ordem, diretamente proporcionais a:
(A) $1, 2, 3$
(B) $1, 4, 5$
(C) $1, 3, 5$
(D) $1, 4, 6$
(E) $2, 5, 6$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
$x = \frac{z}{5} \Leftrightarrow z = 5x$
$z = x + y \Rightarrow 5x = x + y \Leftrightarrow y = 4x$
Portanto, $(x, y, z) = (x, 4x, 5x)$ o que implica que x, y e z são, nesta ordem, diretamente proporcionais a $1, 4, 5$.

2) O número $583ab$ é divisível por 9. O valor máximo da soma dos algarismos a e b, é:
(A) indeterminado.
(B) 20
(C) 18
(D) 11
(E) 2

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Se o número $583ab$ é divisível por 9, então a soma dos seus algarismos $5+8+3+a+b=16+a+b$ é um múltiplo de 9, o que ocorre quando $a+b$ é um múltiplo de 9 mais 2.
Como a e b são algarismos na base 10, então $0 \le a+b \le 18$. Assim, o valor máximo dessa soma é $a+b=9+2=11$.

3) Um minério A tem massa igual a 5 kg e contém 72% de ferro, e um minério B de massa m, contém 58% de ferro. A mistura dessas massas contém 62% de ferro. A massa m, em kg, é:
(A) 10
(B) $10,5$
(C) $12,5$
(D) $15,5$
(E) $18,5$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Sabe-se que 5 kg do minério A contém $72\% \cdot 5 = 3,6\text{ kg}$ de ferro e que $m\text{ kg}$ do minério B contém $58\% \cdot m = 0,58m\text{ kg}$ de ferro.

A mistura dessas massas tem $(3,6 + 0,58m)\text{ kg}$ de ferro em uma massa total de $(5+m)\text{ kg}$. Como a concentração de ferro na mistura é 62%, então temos:

$$\frac{3,6+0,58m}{5+m} = 0,62 \Leftrightarrow 3,6+0,58m = 3,1+0,62m \Leftrightarrow 0,04m = 0,5 \Leftrightarrow m = 12,5\text{ kg}.$$

4) O número 12 é o máximo divisor comum entre os números 360, a e b tomados dois a dois. Sabendo que $100 < a < 200$, e que $100 < b < 200$, pode-se afirmar que $a+b$ vale:
(A) 204
(B) 228
(C) 288
(D) 302
(E) 372

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
$\text{mdc}(360, a) = 12 \Rightarrow a = 12A$ e $A \in \mathbb{Z}$ não tem fator 2, 3 ou 5.
$\text{mdc}(360, b) = 12 \Rightarrow b = 12B$ e $B \in \mathbb{Z}$ não tem fator 2, 3 ou 5.
$\text{mdc}(a,b) = 12 \Rightarrow \text{mdc}\left(\frac{a}{12}, \frac{b}{12}\right) = \frac{12}{12} \Rightarrow \text{mdc}(A,B) = 1$
$100 < a < 200 \Rightarrow 100 < 12A < 200 \Rightarrow 9 \le A \le 16$
$100 < b < 200 \Rightarrow 100 < 12B < 200 \Rightarrow 9 \le B \le 16$
As expressões acima mostram que A e B devem pertencer ao conjunto $\{9,10,11,12,13,14,15,16\}$, mas, como A e B não podem ter fator 2, 3 ou 5, então, sem perda de generalidade, temos $A = 11$ e $B = 13$, ou seja, $a = 12 \cdot 11 = 132$ e $b = 12 \cdot 13 = 156$, o que implica $a + b = 132 + 156 = 288$.

5) O valor de $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$ é:
(A) 1
(B) $\sqrt{2}$
(C) 2
(D) $2\sqrt{2}$
(E) $3\sqrt{2}$

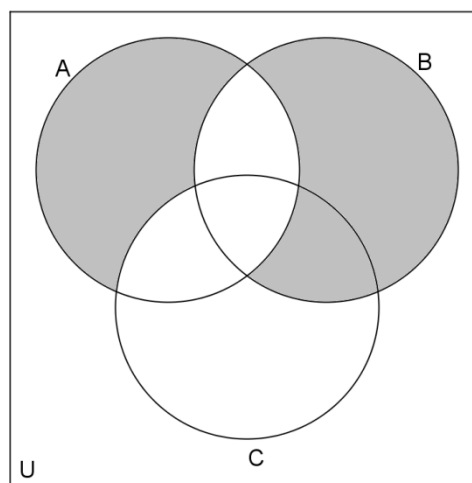
RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$x=\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}-2\sqrt{\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

$$=\frac{2\sqrt[4]{8}-2\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}=\frac{2\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}=2$$

6) Considere os conjuntos A, B, C e U no diagrama abaixo. A região sombreada corresponde ao conjunto:

(A) $[A-(B\cap C)]\cup[(B\cap C)-A]$

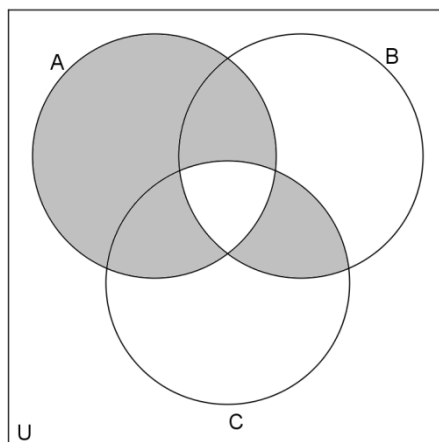
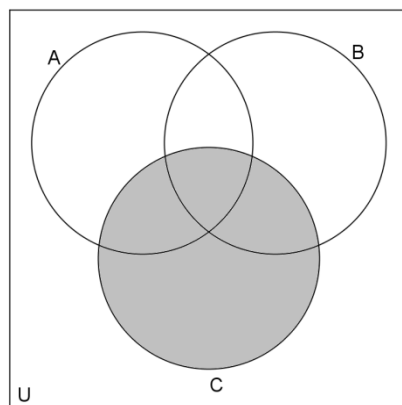
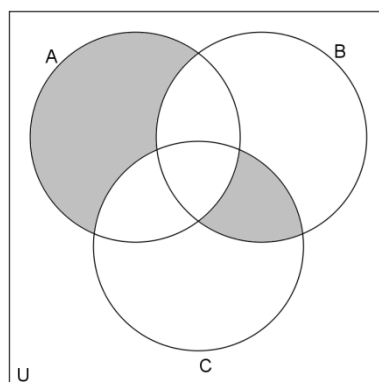
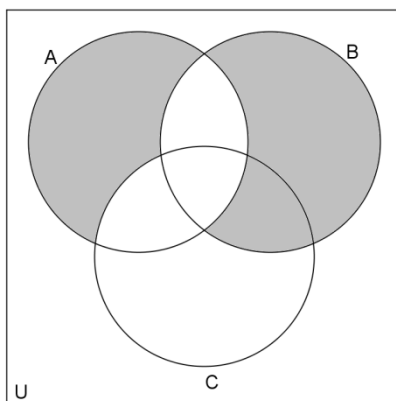
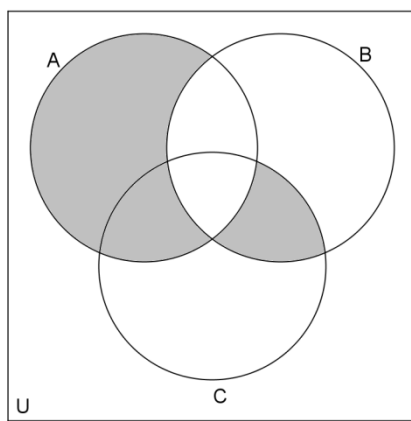
(B) $C_{(A\cup B\cup C)}[(A\cup B)-C]$

(C) $C_{A\cup(B\cap C)}[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$

(D) $(A\cup B)-[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$

(E) $[(B\cap C)-A]\cup(A-B)$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Vamos confeccionar o diagrama de Venn de cada uma das alternativas e comparar com o do enunciado.
(A) $\left[A-(B\cap C)\right]\cup\left[(B\cap C)-A\right]$

(B) $C_{(A\cup B\cup C)}\left[(A\cup B)-C\right]=(A\cup B\cup C)-\left[(A\cup B)-C\right]$

(C) $C_{A\cup(B\cap C)}\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\right]=A\cup(B\cap C)-\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\right]$

(D) $(A \cup B) - [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

(E) $[(B \cap C) - A] \cup (A - B)$

Logo, a opção correta é a letra (D).

7) A representação decimal do número $\left(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c\right)^{-1}$ sendo $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ números naturais, é uma dízima periódica composta. Sendo assim, pode-se afirmar que, necessariamente:

(A) $a = 0,\ b \neq 0$ e $c \neq 0$.
(B) $a \neq 0,\ b \neq 0$ e $c = 0$.
(C) $a \neq 0,\ b = 0$ e $c \neq 0$.
(D) $a \neq 0$ ou $c \neq 0$ e $b \neq 0$.
(E) $a \neq 0,\ b \neq 0$ e $c \neq 0$.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Para que o número $\left(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c\right)^{-1} = \frac{1}{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c}$ seja uma dízima periódica composta, ele deve possuir no denominador um fator diferente de 2 e de 5 (isso faz que o número seja uma dízima periódica em vez de um decimal exato) e um fator 2 ou 5 (isso faz que a dízima periódica seja composta).
Assim, devemos ter $b \neq 0$ e $a \neq 0$ ou $c \neq 0$.

8) Sejam os conjuntos

$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-3}{x+5} \geq 0 \right\}$

$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid (x-3)(x+5) \geq 0 \}$

$C = \{ x \in \mathbb{R} \mid x-3 \geq 0 \text{ e } x+5 \geq 0 \}$

Pode-se afirmar que:

(A) $A = B = C$
(B) $A \subset B \subset C$
(C) $A \subset C \subset B$
(D) $C \subset A \subset B$
(E) $C \subset A = B$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-3}{x+5} \geq 0 \right\} \Rightarrow \frac{x-3}{x+5} \geq 0 \Leftrightarrow x < -5 \text{ ou } x \geq 3 \Rightarrow A =]-\infty, -5[\cup [3, +\infty[$

$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid (x-3)(x+5) \geq 0 \} \Rightarrow (x-3)(x+5) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -5 \text{ ou } x \geq 3 \Rightarrow B =]-\infty, -5] \cup [3, +\infty[$

$C = \{ x \in \mathbb{R} \mid x-3 \geq 0 \text{ e } x+5 \geq 0 \} \Rightarrow (x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \text{ e } x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5)$

$\Leftrightarrow x \geq 3 \Rightarrow C = [3, +\infty[$

$\Rightarrow C \subset A \subset B$

9) Os ponteiros das horas, dos minutos e dos segundos de um relógio indicam zero hora. Até as 9 horas do mesmo dia, os ponteiros dos minutos e dos segundos terão se encontrado um número de vezes igual a:

(A) 524
(B) 531
(C) 540
(D) 573
(E) 590

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Em geral, os ponteiros dos minutos e dos segundos encontram-se uma vez a cada minuto. A exceção ocorre no último minuto e no primeiro minuto de cada hora, em que ocorre apenas um encontro para os dois, exatamente entre um e outro. Por exemplo, entre $0\text{ h } 59\text{ min}$ e $1\text{ h } 1\text{min}$ ocorre apenas um encontro a 1 h.

Desde zero hora até as 9 horas do mesmo dia, a quantidade de minutos é $9 \cdot 60 = 540$. Portanto, a quantidade de encontros entre os ponteiros dos minutos e dos segundos é $540 - 9 = 531$.

10) Considere um losango de lado L e área S. A área do quadrado inscrito no losango, em função de L e S é:

(A) $\frac{4S^2}{L^2+2S}$

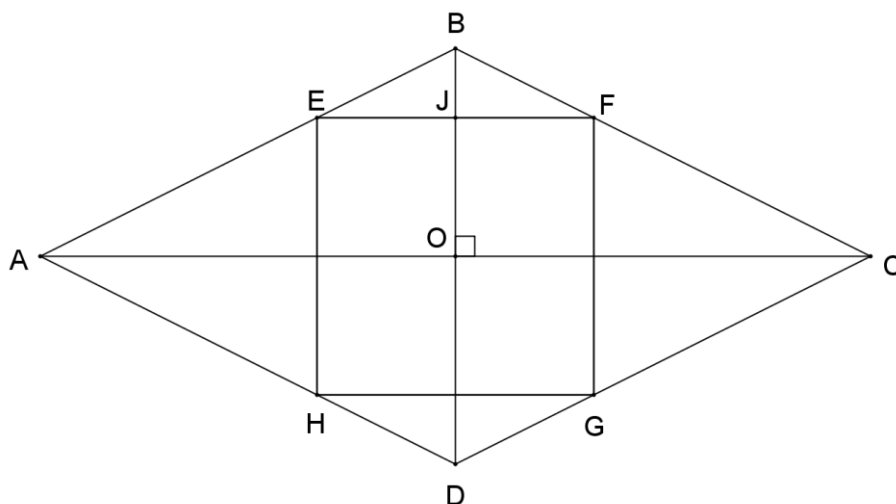
(B) $\frac{16S^2}{4L^2+S}$

(C) $\frac{S^2}{L^2+S}$

(D) $\frac{4S^2}{4L^2+S}$

(E) $\frac{S^2}{L^2+2S}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Sejam $AB=BC=CD=DA=L$ os lados do losango de diagonais $AC=D$ e $BD=d$, e área $S=\frac{Dd}{2}$, e $EF=FG=GH=HE=x$ os lados do quadrado inscrito no losango.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AOB, temos:

$$AB^2=AO^2+BO^2 \Leftrightarrow L^2=\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4L^2=D^2+d^2.$$

Como $EF \parallel AC$, então $\Delta BEF \sim \Delta BAC$ o que implica

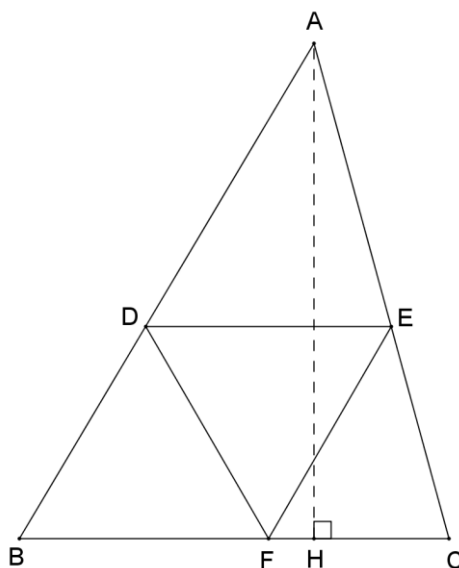
$$\frac{BJ}{BO}=\frac{EF}{AC} \Leftrightarrow \frac{\frac{d}{2}-\frac{x}{2}}{\frac{d}{2}}=\frac{x}{D} \Leftrightarrow \frac{d-x}{d}=\frac{x}{D} \Leftrightarrow x=\frac{Dd}{D+d}.$$

A área do quadrado é dada por $S_{EFGH}=x^2=\left(\frac{Dd}{D+d}\right)^2=\frac{(Dd)^2}{D^2+d^2+2Dd}=\frac{(2S)^2}{4L^2+2\cdot 2S}=\frac{S^2}{L^2+S^2}$.

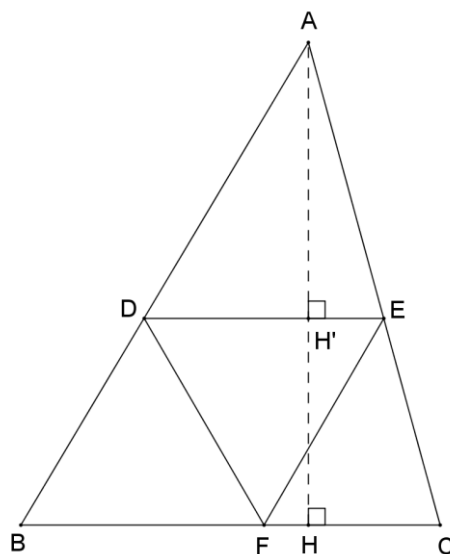
11) O total de polígonos convexos cujo número n de lados é expresso por dois algarismos iguais e tais que seu número d de diagonais é tal que $d > 26n$ é:
(A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7
(E) 8

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
$$d = \frac{n(n-3)}{2} > 26n \overset{n>0}{\Rightarrow} n-3 > 52 \Leftrightarrow n > 55$$
Como n é formado por dois algarismos iguais, então $n \in \{66, 77, 88, 99\}$. Logo, há 4 polígonos.

12) No triângulo ABC, tem-se $\overline{BC} = a$ e a altura $\overline{AH} = h$. O lado do triângulo equilátero DEF inscrito em ABC tal que DE é paralelo a BC, é dado pela expressão:

(A) $\frac{2ah}{a\sqrt{3}+2h}$
(B) $\frac{ah}{a\sqrt{3}+h}$
(C) $\frac{2h}{h\sqrt{3}+a}$
(D) $\frac{2a}{a\sqrt{3}+h}$
(E) $\frac{2ah}{2a\sqrt{3}+h}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Seja $DE = L$ e H' o ponto de interseção entre DE e AH.

Como $DE \parallel BC$, então HH' é igual à altura do triângulo equilátero DEF, ou seja, $HH' = \frac{L\sqrt{3}}{2}$ e $\Delta ADE \sim \Delta ABC$. Assim, temos:

$$\frac{AH'}{AH} = \frac{DE}{BC} \Leftrightarrow \frac{h - \frac{L\sqrt{3}}{2}}{h} = \frac{L}{a} \Leftrightarrow 2ah - aL\sqrt{3} = 2Lh \Leftrightarrow L = \frac{2ah}{a\sqrt{3} + 2h}.$$

13) Qual a solução do sistema abaixo?

$$\begin{cases} \sqrt{\sqrt{x} + 2} \cdot \sqrt{\sqrt{x} - 2} - 5\sqrt[4]{x - 4} + 6 < 0 \\ 1500x^{-1} + x > 80 \end{cases}$$

(A) $x > 85$
(B) $30 < x < 50$
(C) $20 < x < 85$
(D) $20 < x < 50$ ou $x > 85$
(E) $20 < x < 30$ ou $50 < x < 85$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

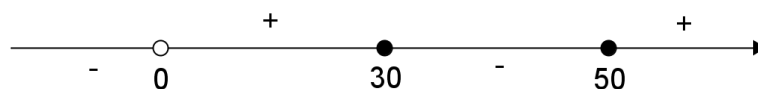
$$\sqrt{\sqrt{x} + 2} \cdot \sqrt{\sqrt{x} - 2} - 5\sqrt[4]{x - 4} + 6 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x} + 2\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)} - 5\sqrt[4]{x - 4} + 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x - 4} - 5\sqrt[4]{x - 4} + 6 < 0 \ \wedge \ x \geq 0$$

$$y = \sqrt[4]{x - 4} \Rightarrow y^2 - 5y + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < y < 3$$

$$\Rightarrow 2 < \sqrt[4]{x - 4} < 3 \Leftrightarrow 16 < x - 4 < 81 \Leftrightarrow 20 < x < 85$$

$$1500x^{-1}+x>80 \Leftrightarrow \frac{1500}{x}+x>80 \Leftrightarrow \frac{x^2-80x+1500}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{(x-50)(x-30)}{x}>0$$

- + - +
0 30 50

$\Leftrightarrow 0<x<30 \ \vee \ x>50$

Efetuando a interseção dos dois intervalos obtidos, visto que x deve satisfazer as duas inequações, temos $20<x<30$ ou $50<x<85$

14) Sobre o polinômio $P(x)=ax^b-3$ sabe-se que $P(2)=17$ e $P(4)=77$. O número de divisores inteiros do número $N=(a+1)^3\cdot b^5$ é:

(A) 24
(B) 36
(C) 48
(D) 72
(E) 108

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} P(2)=a\cdot 2^b-3=17 \Leftrightarrow a\cdot 2^b=20 \\ P(4)=a\cdot 4^b-3=77 \Leftrightarrow a\cdot 4^b=80 \Leftrightarrow a\cdot 2^{2b}=80 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a\cdot 2^{2b}}{a\cdot 2^b}=\frac{80}{20} \Leftrightarrow 2^b=4=2^2 \Leftrightarrow b=2$$

$$\Rightarrow a\cdot 2^2=20 \Leftrightarrow a=5$$

$$N=(a+1)^3\cdot b^5=(5+1)^3\cdot 2^5=6^3\cdot 2^5=(2\cdot 3)^3\cdot 2^5=2^8\cdot 3^3$$

Logo, o número de divisores inteiros de N é $2\cdot(8+1)(3+1)=72$.

Observe que ao referir-se ao número de divisores inteiros, o examinador quis incluir tanto os divisores positivos quanto os negativos, razão pela qual aparece o fator 2 no início da expressão utilizada para o cálculo do número de divisores.

15) Num triângulo retângulo, se diminuirmos cada um dos catetos em 4 cm, a área diminuirá de 506 cm^2. A soma dos catetos, em cm, vale:

(A) 182
(B) 248
(C) 250
(D) 257
(E) 260

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Seja um triângulo retângulo de catetos b e c, e área $S=\frac{bc}{2}$.

O triângulo obtido diminuindo-se cada um dos catetos de 4 cm, tem área dada por: $S-506=\frac{(b-4)(c-4)}{2} \Leftrightarrow 2S-1012=bc-4(b+c)+16$.

Como $2S=bc$, temos: $-1012=-4(b+c)+16 \Leftrightarrow b+c=257\text{ cm}$.

16) Qual o valor da expressão abaixo:

$$\left(\frac{1+2+3+\cdots+50}{5+10+15+\cdots+250}\right)^{-1/2}\left(\sqrt[3]{2\sqrt{1,25}}\right)^{-1}$$

(A) 1
(B) $\sqrt{5}$
(C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
(D) $\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$
(E) $\sqrt[3]{5}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$\left(\frac{1+2+3+\cdots+50}{5+10+15+\cdots+250}\right)^{-1/2}\left(\sqrt[3]{2\sqrt{1,25}}\right)^{-1}=\left(\frac{1+2+3+\cdots+50}{5\cdot(1+2+3+\cdots+50)}\right)^{-1/2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 1,25}}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1/2}\left(\sqrt[6]{5}\right)^{-1}=5^{1/2}\cdot 5^{-1/6}=5^{1/3}=\sqrt[3]{5}$$

17) Simplificando a expressão $\frac{\left(a^2-b^2-c^2-2bc\right)\cdot(a+b-c)}{(a+b+c)\cdot\left(a^2+c^2-2ac-b^2\right)}$ para os valores de a, b, c que não anulam o denominador, obtêm-se:

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) $a+b+c$
(E) $a-b+c$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$\frac{\left(a^2-b^2-c^2-2bc\right)\cdot\left(a+b-c\right)}{\left(a+b+c\right)\cdot\left(a^2+c^2-2ac-b^2\right)}=\frac{\left[a^2-\left(b^2+2bc+c^2\right)\right]\cdot\left(a+b-c\right)}{\left(a+b+c\right)\cdot\left[\left(a^2-2ac+c^2\right)-b^2\right]}=$$

$$=\frac{\left[a^2-(b+c)^2\right]\cdot(a+b-c)}{(a+b+c)\cdot\left[(a-c)^2-b^2\right]}=\frac{(a+b+c)\cdot(a-b-c)\cdot(a+b-c)}{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b-c)}=1$$

18) De um ponto fora de um círculo de 60 cm de raio traçam-se duas tangentes. Os pontos de tangência determinam na circunferência um arco de $10\pi\text{ cm}$. O ângulo formado pelas duas tangentes vale:

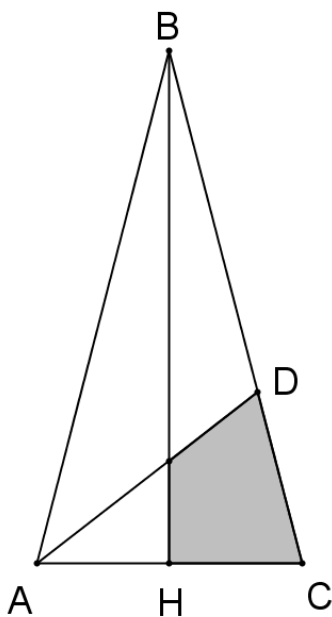
(A) 30°
(B) 120°
(C) 145°
(D) 150°
(E) 330°

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

O arco de $10\pi\text{ cm}$ está associado a um ângulo central de $\frac{10\pi}{60}=\frac{\pi}{6}\text{rad}=30^\circ$.

O ângulo formado pelas tangentes é o suplemento desse ângulo central, então vale $180^\circ-30^\circ=150^\circ$.

19) O triângulo ABC da figura abaixo tem área S. Sabendo que $\overline{AB}=\overline{BC}=2\overline{AC}$, $\overline{BH}$ é altura e $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo $\hat{A}$, a área da região hachurada, em função de S é igual a:

(A) $\frac{2S}{15}$

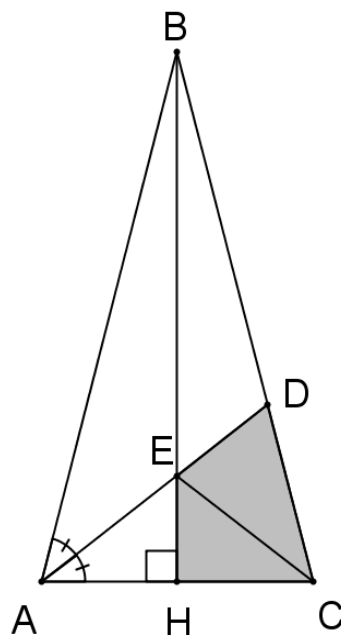
(B) $\frac{S}{10}$

(C) $\frac{S}{18}$

(D) $\frac{7S}{30}$

(E) $\frac{S}{21}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$\overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow \Delta ABC$ é isósceles $\Rightarrow AH = HC = \frac{AC}{2}$

Aplicando o teorema das bissetrizes ao ΔABC, temos $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = 2$.

Aplicando o teorema das bissetrizes ao ΔABH, temos $\frac{BE}{AB} = \frac{EH}{AH} \Rightarrow \frac{BE}{EH} = \frac{AB}{AH} = 4$.

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow S_{ABH} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABC}$$

$$\frac{S_{AEH}}{S_{ABH}} = \frac{EH}{BH} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow S_{AEH} = \frac{S_{ABH}}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{S_{ABC}}{10}$$

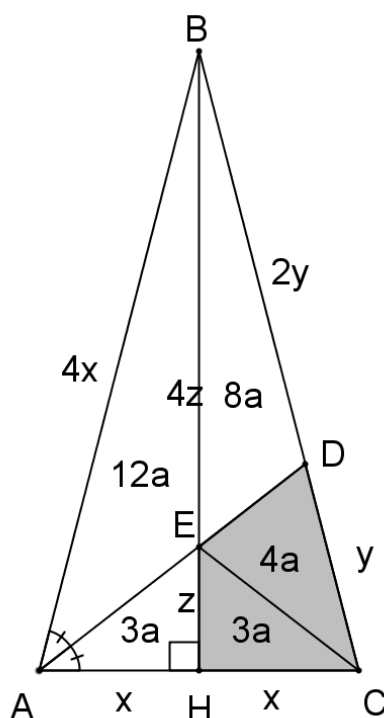
$$\frac{S_{EHC}}{S_{AEH}} = \frac{HC}{AH} = 1 \Leftrightarrow S_{EHC} = 2 \cdot S_{AEH} = \frac{S_{ABC}}{10}$$

$$\frac{S_{BEC}}{S_{EHC}}=\frac{BE}{EH}=4\Leftrightarrow S_{BEC}=4\cdot S_{EHC}=4\cdot\frac{S_{ABC}}{10}=\frac{2}{5}\cdot S_{ABC}$$

$$\frac{S_{EDC}}{S_{BEC}}=\frac{DC}{BC}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow S_{EDC}=\frac{1}{3}\cdot S_{BEC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot S_{ABC}=\frac{2}{15}\cdot S_{ABC}$$

$$S_{CDEH}=S_{EHC}+S_{EDC}=\frac{S_{ABC}}{10}+\frac{2}{15}\cdot S_{ABC}=\frac{7}{30}\cdot S_{ABC}=\frac{7S}{30}$$

Uma maneira mais simples de resolver esse tipo de problemas é indicar as razões entre os segmentos conhecidos na figura, designar uma das área por uma variável e determinar as outras áreas em função daquela.

$$S_{EHC}=3a\Rightarrow S_{CDEH}=7a=7.\frac{S_{ABC}}{30}=\frac{7S}{30}$$

Outra opção interessante é usar a seguinte relação:

$$\frac{S_{BDE}}{S_{CBH}}=\frac{BD\cdot BE}{BC\cdot BH}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}\Rightarrow S_{CDEH}=\left(1-\frac{8}{15}\right)S_{CBH}=\frac{7}{15}\cdot\frac{S_{ABC}}{2}=\frac{7S}{30}$$

20) As raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ são iguais a m e n. Assinale a equação cujas raízes são m^3 e n^3.

(A) $a^3x^2-b\left(3ac+b^2\right)x+c^3=0$

(B) $ax^2-b\left(3ac-b^2\right)x+c=0$

(C) $a^3x^2+b\left(b^2-3ac\right)x+c=0$

(D) $a^3x^2 + b\left(b^2 - 3ac\right)x - c^3 = 0$

(E) $a^3x^2 + b\left(b^2 - 3ac\right)x + c^3 = 0$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$m + n = -\frac{b}{a}$ e $mn = \frac{c}{a}$

$$m^3 + n^3 = (m+n)^3 - 3mn(m+n) = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{-b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3}$$

$$m^3 \cdot n^3 = (mn)^3 = \left(\frac{c}{a}\right)^3 = \frac{c^3}{a^3}$$

A equação cujas raízes são m^3 e n^3 é

$$x^2 - \left(\frac{-b^3 + 3abc}{a^3}\right)x + \frac{c^3}{a^3} = 0 \Leftrightarrow a^3x^2 + b\left(b^2 - 3ac\right)x + c^3 = 0.$$

NOTA 5: RELAÇÕES ENTRE COEFICIENTES E RAÍZES DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

As raízes de uma equação do 2º grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ são $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

A partir dessas expressões, podemos obter expressões para o cálculo da soma, do produto e da diferença entre as raízes sem que seja necessário resolver a equação.

Soma das raízes: $S = \sigma_1 = -\frac{b}{a}$

Produto das raízes: $P = \sigma_2 = \frac{c}{a}$

Diferença das raízes: $|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

Soma dos quadrados das raízes:

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \sigma_1^2 - 2\cdot\sigma_2 = S^2 - 2P$$

Soma dos inversos das raízes: $S_{-1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{S}{P}$

Soma dos quadrados dos inversos das raízes: $S_{-2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{\sigma_1^2 - 2\cdot\sigma_2}{\sigma_2^2} = \frac{S^2 - 2\cdot P}{P^2}$

Soma dos cubos das raízes: $S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \sigma_1^3 - 3\cdot\sigma_2\cdot\sigma_1 = S^3 - 3\cdot S\cdot P$

Média aritmética das raízes: $\text{M.A.} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{S}{2}$

Média geométrica das raízes: $\text{M.G.} = \sqrt{x_1 \cdot x_2} = \sqrt{\sigma_2} = \sqrt{P}$

Média harmônica das raízes: $\text{M.H.} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2}} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{2 \cdot \sigma_2}{\sigma_1} = \frac{2P}{S}$

Duas equações $ax^2 + bx + c = 0$ e $a'x^2 + b'x + c' = 0$ possuem as mesmas raízes se, e somente se, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

Obtenção da equação a partir de suas raízes

A equação do 2º grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) possui raízes cuja soma é $S = -\frac{b}{a}$ e o produto é $P = \frac{c}{a}$.

Dividindo ambos os membros por a, resulta $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Substituindo as expressões da soma e do produto, temos: $x^2 - Sx + P = 0$

****

21) Para que o trinômio $y = ax^2 + bx + c$ admita um valor máximo e tenha raízes de sinais contrários, deve-se ter:

(A) $a < 0$, $c > 0$ e b qualquer

(B) $a < 0$, $c < 0$ e $b = 0$

(C) $a > 0$, $c < 0$ e b qualquer

(D) $a > 0$, $c < 0$ e $b = 0$

(E) $a < 0$, $c < 0$ e b qualquer

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

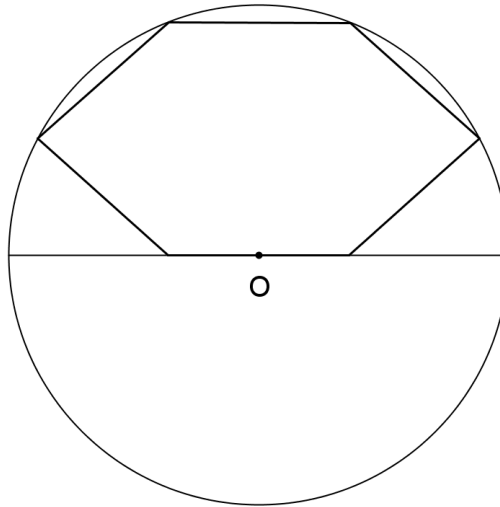
Para que um trinômio do 2° grau admita valor máximo, seu gráfico deve ter concavidade voltada para baixo, o que ocorre quando o coeficiente do termo quadrático é negativo, ou seja, $a < 0$.

As suas raízes terão sinais contrários se o discriminante Δ for positivo e o produto das raízes negativo.

Assim, devemos ter $P = \frac{c}{a} < 0$ e, como $a < 0$, conclui-se que $c > 0$.

Note que, como $a < 0$ e $c > 0$, temos $ac < 0 \Leftrightarrow -4ac > 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0$, ou seja, a condição de discriminante positivo é sempre satisfeita para esses sinais de a e c.

Portanto, as condições do enunciado ocorrem para $a < 0$, $c > 0$ e b qualquer.

22) O lado do hexágono eqüilátero inscrito numa semicircunferência do círculo de raio r e centro O, onde uma de suas bases está sobre o diâmetro, é:

(A) $\frac{r}{2}$

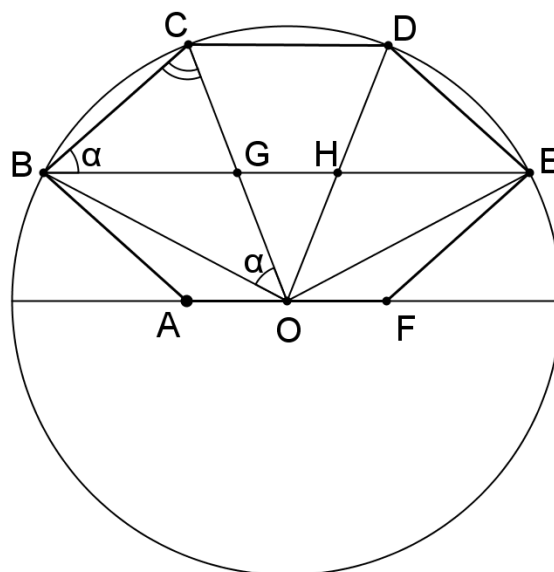
(B) $\frac{r\sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{r\sqrt{3}}{2}$

(D) r

(E) $\frac{2r}{3}$

RESPOSTA: B

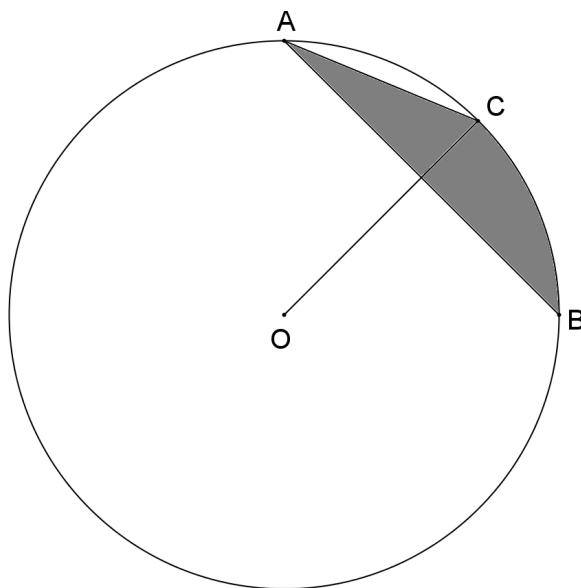
RESOLUÇÃO:

Como o hexágono ABCDEF é equilátero, então $AB = BC = CD = CE = EF = FA = L$ e $BC = CD = DE = \alpha$.

$B\hat{O}C = BC = \alpha$

$C\hat{B}E = \frac{CDE}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$

Pela simetria da figura, BE equidista de AF e CD, então GH é base média do ΔOCD e, consequentemente, G é ponto médio de OC.

$$\left.\begin{array}{l} C\hat{B}G = B\hat{O}C = \alpha \\ B\hat{C}G = B\hat{C}O \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BCG \sim \Delta OBC \Rightarrow \frac{BC}{OC} = \frac{CG}{BC} \Leftrightarrow BC = \sqrt{OC \cdot CG} \Leftrightarrow L = \sqrt{r \cdot \frac{r}{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

23) Na figura abaixo, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são, respectivamente, os lados do quadrado e do octógono regular inscritos no círculo de centro O e raio r. A área sombreada é dada por:

(A) $\frac{r^2}{8}\left(\pi + 4 - 2\sqrt{2}\right)$

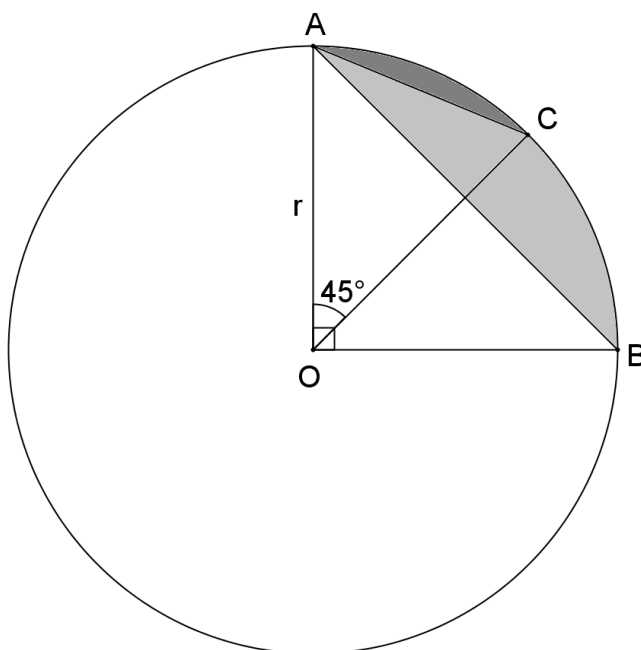
(B) $\frac{r^2}{8}\left(\pi + 4 + 2\sqrt{2}\right)$

(C) $\frac{r^2}{8}\left(4 - \pi + \sqrt{2}\right)$

(D) $\frac{r^2}{8}\left(4 + 2\sqrt{2} - \pi\right)$

(E) $\frac{r^2}{8}\left(\pi - 4 + 2\sqrt{2}\right)$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Como $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são, respectivamente, os lados do quadrado e do octógono regular inscritos no círculo, então $A\hat{O}B = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ e $A\hat{O}C = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Assim, a área sombreada é igual à área de um segmento circular de 90° menos a área de um segmento circular de 45° em uma circunferência de raio r.

$$S_{seg.90^\circ} = \frac{\pi \cdot r^2}{4} - \frac{r \cdot r}{2} = \frac{r^2}{4}(\pi - 2)$$

$$S_{seg \cdot 45^\circ} = \frac{\pi \cdot r^2}{8} - \frac{r \cdot r}{2} \cdot \text{sen}\, 45^\circ = \frac{r^2}{8}\left(\pi - 2\sqrt{2}\right)$$

$$S = S_{seg.90^\circ} - S_{seg.45^\circ} = \frac{r^2}{4}(\pi - 2) - \frac{r^2}{8}\left(\pi - 2\sqrt{2}\right) = \frac{r^2}{8}\left(\pi - 4 + 2\sqrt{2}\right) \text{ u.a.}$$

24) Considere as sentenças abaixo.

I) $4^{8^3} = 2^{1024}$

II) $\sqrt[4]{64} = \sqrt[6]{512} < \sqrt[3]{128}$

III) $\sqrt{25} + \sqrt{56} = 9$

IV) $\sqrt{A^4 + B^4} = A^2 + B^2$, para todo A e B reais

Pode-se concluir que:

(A) Todas são verdadeiras.
(B) (III) é a única falsa.
(C) Somente (I) e (II) são verdadeiras.
(D) (IV) é a única falsa.
(E) Existe somente uma sentença verdadeira.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
I) VERDADEIRA

$4^{8^3} = 4^{512} = \left(2^2\right)^{512} = 2^{1024}$

II) VERDADEIRA

$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt[6]{512} = \sqrt[6]{2^9} = 2^{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = 2^{\frac{7}{3}}$

$\frac{3}{2} < \frac{7}{3} \Rightarrow \sqrt[4]{64} = \sqrt[6]{512} < \sqrt[3]{128}$

III) FALSA

$\sqrt{25} + \sqrt{56} = 5 + 2\sqrt{14} \neq 9$

IV) FALSA

$\left(\sqrt{A^4 + B^4}\right)^2 = A^4 + B^4 \quad \text{e} \quad \left(A^2 + B^2\right)^2 = A^4 + B^4 + 2AB$

Logo, a igualdade só ocorre quando $AB = 0$.

25) A divisão do polinômio $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ pelo polinômio $D(x) = 2x^2 - 3x + 1$ apresenta quociente $Q(x)$ e resto $R(x)$. Assinale a alternativa falsa:

(A) $R(1) = 3$.

(B) $R(x) > 0$ para $x > \frac{1}{9}$.

(C) O menor valor de $Q(x)$ ocorre para $x = -\frac{3}{4}$.

(D) A média geométrica dos zeros de $Q(x)$ é $\frac{\sqrt{22}}{4}$.

(E) O valor mínimo de $Q(x)$ é $\frac{35}{32}$.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Pelo algoritmo da divisão de Euclides, temos $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$, onde $R(x)$ é no máximo do 1° grau.
Vamos efetuar a divisão pelo método da chave.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 0x^3 + x^2 + 0x + 1 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline
-x^4 + (3/2)x^3 - (1/2)x^2 & (1/2)x^2 + (3/4)x + 11/8 \\
/ \quad (3/2)x^3 + (1/2)x^2 + 0x + 1 & \\
-(3/2)x^3 + (9/4)x^2 - (3/4)x & \\
/ \quad (11/4)x^2 - (3/4)x + 1 & \\
-(11/4)x^2 + (33/8)x - (11/8) & \\
(27/8)x - (3/8) &
\end{array}
$$

Portanto, $Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{11}{8}$ e $R(x) = \frac{27}{8}x - \frac{3}{8}$.

(A) CORRETA: $R(1) = \frac{27}{8} \cdot 1 - \frac{3}{8} = 3$

(B) CORRETA: $R(x) = \frac{27}{8}x - \frac{3}{8} > 0 \Leftrightarrow \frac{27}{8}x > \frac{3}{8} \Leftrightarrow x > \frac{1}{9}$

(C) CORRETA: O menor valor de $Q(x)$ ocorre na abscissa do vértice, ou seja, $x_V = \frac{-(3/4)}{2 \cdot (1/2)} = -\frac{3}{4}$.

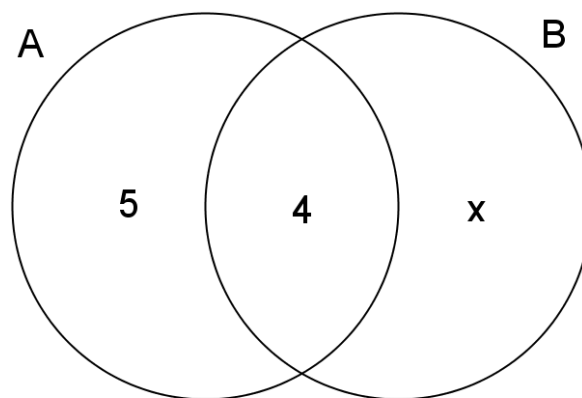
(D) INCORRETA: A média geométrica dos zeros de $Q(x)$ é $\sqrt{r_1 \cdot r_2} = \sqrt{\frac{(11/8)}{(1/2)}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

(E) CORRETA: O valor mínimo de $Q(x)$ é $Q\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{11}{8} = \frac{35}{32}$.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1985/1986

1) Representando-se por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto X, considere dois conjuntos A e B tais que $n(A \cap B) = 4$, $n(A - B) = 5$ e $n(A \times B) = 36$. Podemos afirmar que $n(A \cup B)$ é igual a:
(A) 4
(B) 6
(C) 7
(D) 9
(E) 10

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Vamos representar os conjuntos A e B em um diagrama de Venn, preenchendo os valores correspondentes à $A \cap B$ e $A - B$.

A análise do diagrama permite concluir que $n(A) = 4 + 5 = 9$.
Além disso, temos: $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 9 \cdot n(B) = 36 \Leftrightarrow n(B) = 4$, o que implica $x = 0$ e $B \subset A$.
Portanto, o número de da união dos dois conjuntos é $n(A \cup B) = n(A) = 9$.

2) Considere os conjuntos $X = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$ e Y, $Y \subset X$. O número de conjuntos Y tais que $4 \in Y$ e $0 \notin Y$ é:
(A) 6
(B) 7
(C) 8
(D) 15
(E) 16

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
$X = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 4\} = \{0,1,2,3,4\}$
Como $Y \subset X = \{0,1,2,3,4\}$, $4 \in Y$ e $0 \notin Y$, então 4 é elemento de Y e $1,2,3$ são possíveis elementos de Y.
Para cada subconjunto X do conjunto $\{1,2,3\}$ temos um conjunto Y associado que é formado pelos elementos de X e pelo elemento 4. Como a quantidade de subconjuntos de $\{1,2,3\}$ é $2^3 = 8$, então esse é o número de conjuntos Y que satisfazem às condições do enunciado.

Alternativamente, poderíamos listar os conjuntos $Y \subset X = \{0,1,2,3,4\}$ tais que $4 \in Y$ e $0 \notin Y$: $\{4\}$, $\{4,1\}$, $\{4,2\}$, $\{4,3\}$, $\{4,1,2\}$, $\{4,1,3\}$, $\{4,2,3\}$, $\{4,1,2,3\}$, que totalizam 8 conjuntos.

3) A média harmônica entre as raízes da equação $340x^2 - 13x - 91 = 0$ é:
(A) 7
(B) -7
(C) $\frac{340}{7}$
(D) $\frac{1}{7}$
(E) -14

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
A média harmônica é igual ao inverso da média aritmética dos inversos. Assim, para dois números a e b, a sua média harmônica é dada por $MH = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$.

Sejam r e s as raízes da equação do 2° grau $340x^2 - 13x - 91 = 0$, então $\sigma_1 = r + s = \frac{-(-13)}{340} = \frac{13}{340}$ e $\sigma_2 = r \cdot s = \frac{-91}{340}$.

Portanto, a média harmônica das raízes da equação é $MH = \frac{2r \cdot s}{r+s} = \frac{2 \cdot \left(\frac{-91}{340}\right)}{\frac{13}{340}} = -14$.

4) O número máximo de divisores positivos do número natural: $48 \cdot 2^{-x^2+2x}$, $x \in \mathbb{N}$ é:
(A) 12
(B) 10
(C) 24
(D) 15
(E) 16

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, devemos escrever o número em sua forma canônica: $48\cdot 2^{-x^2+2x}=\left(2^4\cdot 3\right)\cdot 2^{-x^2+2x}=2^{-x^2+2x+4}\cdot 3$.
O número máximo de divisores positivos ocorre quando o expoente do fator primo 2 for máximo. O valor máximo de $-x^2+2x+4$ é $\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-\left(2^2-4\cdot(-1)\cdot 4\right)}{4\cdot(-1)}=5$, que ocorre quando $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2\cdot(-1)}=1\in\mathbb{N}$.
O número resultante é $2^5\cdot 3$, cuja quantidade de divisores positivos é igual a $(5+1)\cdot(1+1)=12$.

5) O valor de x no sistema $\begin{cases} 16x-y = 1 \\ \sqrt{x+2}-\sqrt[4]{y+33} = 1 \end{cases}$ é:

(A) $15+14\sqrt{2}$
(B) $15+12\sqrt{2}$
(C) $15+10\sqrt{2}$
(D) $15+8\sqrt{2}$
(E) $15+6\sqrt{2}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} 16x-y = 1 \\ \sqrt{x+2}-\sqrt[4]{y+33} = 1 \end{cases}$$

$16x-y=1\Leftrightarrow y=16x-1\Rightarrow y+33=16x+32=16(x+2)$
Substituindo a relação encontrada na segunda equação, temos:
$\sqrt{x+2}-\sqrt[4]{16(x+2)}=1\Leftrightarrow\sqrt{x+2}-2\sqrt[4]{x+2}-1=0$
Fazendo $\sqrt[4]{x+2}=z$, temos: $z^2-2z-1=0\Leftrightarrow z=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$.
Como $z=\sqrt[4]{x+2}\geq 0$, então
$\sqrt[4]{x+2}=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow x+2=\left(3+2\sqrt{2}\right)^2=17+12\sqrt{2}\Leftrightarrow x=15+12\sqrt{2}$

6) Uma mercadoria foi comprada por $R\$\ 20,00$. Para que haja um lucro de 60% sobre o preço de venda, esta mercadoria deve ser vendida por:
(A) $R\$\ 32,00$
(B) $R\$\ 50,00$
(C) $R\$\ 48,00$
(D) $R\$\ 45,00$
(E) $R\$\ 58,00$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
O preço de custo da mercadoria é $PC = 20$, o lucro deve ser $L = 60\% \cdot PV = 0,6 \cdot PV$, onde PV é o preço de venda da mercadoria. Assim, temos:

$$L = PV - PC \Rightarrow 0,6 \cdot PV = PV - PC \Leftrightarrow 0,4 \cdot PV = PC \Leftrightarrow PV = \frac{PC}{0,4} = \frac{20}{0,4} = 50.$$

NOTA 6: OPERAÇÕES COM MERCADORIAS

Operações com mercadorias são operações que envolvem a compra e venda de mercadorias e o lucro ou prejuízo nessas operações.
Nas vendas com lucro, o preço de venda é obtido pelo preço de custo mais o lucro: $PV = PC + L$.
Nas vendas com prejuízo, o preço de venda é obtido pelo preço de custo menos o prejuízo: $PV = PC - P$.
O lucro ou o prejuízo são comumente calculados com base no preço de custo, mas podem também ser calculados sobre o preço de venda. Observe o quadro a seguir.

	Lucro/prejuízo sobre o preço de custo	Lucro/prejuízo sobre o preço de venda
Venda com lucro	$PV = PC + i\% \cdot PC$	$PV = PC + i\% \cdot PV$
Venda com prejuízo	$PV = PC - i\% \cdot PC$	$PV = PC - i\% \cdot PV$

Exemplo 1: Uma mercadoria custou R$ 80,00. Por quanto deve ser vendida para que haja um lucro de 10% sobre o preço de custo?
$PV = PC + 10\% \cdot PC = 80 + 80 \cdot 10\% = 80 + 80 \cdot 0,1 = 80 + 8 = 88,00$

Exemplo 2: Uma mercadoria custou R$ 80,00. Por quanto deve ser vendida para que haja um lucro de 10% sobre o preço de venda?

$$PV = PC + 10\% \cdot PV = PC + 0,1 \cdot PV \Leftrightarrow (1 - 0,1) \cdot PV = PC \Leftrightarrow PV = \frac{PC}{0,9} = \frac{80}{0,9} \approx 88,89$$

Exemplo 3: Uma mercadoria foi vendida por R$180,00, com um prejuízo de 10% sobre o preço de venda. Qual o preço de custo dessa mercadoria?
$PV = PC - 10\% \cdot PV = PC - 0,1PV \Leftrightarrow 1,1 \cdot PV = PC \Leftrightarrow PC = 1,1 \cdot 180 = 198,00$

Exemplo 4: Uma calça foi vendida por R$ 120,00 com um lucro de 20% sobre o preço de custo. Qual o preço de custo da calça?

$$PV = PC + 20\% \cdot PC = PC + 0,2 \cdot PC = 1,2 \cdot PC \Leftrightarrow PC = \frac{PV}{1,2} = \frac{120}{1,2} = 100,00$$

****

7) O valor da expressão $E = 9a^3 - 3a$, para $a = \left(0,2666... + \frac{5^{-1} \cdot \left(3^3 + 3^2 \cdot (-2)^3\right)}{(0,333...)^{-3} \cdot (-5)}\right)^{\frac{1}{2}}$ é:

(A) $\sqrt{3}$
(B) $\sqrt{2}$
(C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
(D) 0
(E) 1

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$a = \left(0,2666... + \frac{5^{-1} \cdot \left(3^3 + 3^2 \cdot (-2)^3\right)}{(0,333...)^{-3} \cdot (-5)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{26-2}{90} + \frac{5^{-1} \cdot (27 + 9 \cdot (-8))}{\left(\frac{3}{9}\right)^{-3} \cdot (-5)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{24}{90} + \frac{-45}{5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot (-5)}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{4}{15} + \frac{9}{5 \cdot 27}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{15} + \frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$E = 9a^3 - 3a = 9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 9 \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$$

8) O resto da divisão de $\left(x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 9x - 8\right)$ por $\left(x^2 + x - 3\right)$ é:
(A) independente de x e não nulo.
(B) positivo para $x < \frac{5}{2}$.
(C) nulo.
(D) par, para $x \in \mathbb{N}$.
(E) igual a 21, para $x = 13$.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Vamos efetuar a divisão pelo método da chave;

$$\begin{array}{r|l} x^5+x^4-5x^3-x^2+9x-8 & x^2+x-3 \\ \underline{-x^5-x^4+3x^3} \qquad\qquad\qquad & x^3-2x+1 \\ / \quad / \quad -2x^3-x^2+9x-8 & \\ \underline{+2x^3+2x^2-6x} \quad & \\ / \qquad x^2+3x-8 & \\ \underline{-x^2-x+3} & \\ / \quad 2x-5 & \end{array}$$

Portanto, o resto da divisão é $R(x)=2x-5$, que é igual a 21 para $x=13$, pois $R(13)=2\cdot 13-5=21$.

9) O número $\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ está situado entre
(A) 1 e $1,5$
(B) $1,5$ e 2
(C) 2 e $2,5$
(D) 2,5 e 3
(E) $3,5$ e 4

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}=\sqrt{1+\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2^4}}=\sqrt{1+\sqrt[3]{2^2}+2\sqrt[3]{2}}=\sqrt{\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^2}=1+\sqrt[3]{2}$$

$$2<1+\sqrt[3]{2}<1+\sqrt{2}\approx 2,4$$

10) Sendo P e Q dois polinômios de mesma variável e de graus respectivamente iguais a m e n, e sendo $m\le n$, podemos afirmar que:
(A) a soma de P e Q é de grau $m+n$.
(B) o produto de P por Q é de grau $m\cdot n$.
(C) a soma de P e Q é de grau m.
(D) o quociente entre de P e Q, caso exista, é de grau $m-n$.
(E) a diferença entre P e Q é de grau n.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
(A) INCORRETA
Contra exemplo: Sejam $P(x)=x+1$ e $Q(x)=-x$, onde $m=n=1$, então $P(x)+Q(x)=1$ e $\partial(P+Q)=0\ne 2=m+n$.
(B) INCORRETA

$\partial(P \cdot Q) = \partial P + \partial Q = m + n$

(C) INCORRETA

Vide contra exemplo de (A).

(D) CORRETA

O quociente entre P e Q só existirá no caso em que $m = n$ e teremos $\partial\left(\frac{P}{Q}\right) = \partial P - \partial Q = m - n = 0$.

Observe que nesse caso, o quociente é uma constante numérica e, portanto, possui grau zero.

(E) INCORRETA

Contra exemplo: Sejam $P(x) = x + 1$ e $Q(x) = x$, onde $m = n = 1$, então $P(x) - Q(x) = 1$ e $\partial(P - Q) = 0 \neq 1 = n$.

NOTA 7: OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

A **adição** e a **subtração** de polinômios são feitas somando-se ou subtraindo-se os coeficientes dos termos de mesmo grau em todas as variáveis.

Exemplo: Se $P(x) = 2x^3 - x - 1$ e $D(x) = x^2 - x + 2$, temos:

$$P(x) + D(x) = (2x^3 - x - 1) + (x^2 - x + 2) = 2x^3 + x^2 + (-1 - 1)x + (-1 + 2) = 2x^3 + x^2 - 2x + 1$$

$$P(x) - D(x) = (2x^3 - x - 1) - (x^2 - x + 2) = 2x^3 - x - 1 - x^2 + x - 2 =$$

$$= 2x^3 - x^2 + (-1 + 1)x + (-1 - 2) = 2x^3 - x^2 - 3$$

Na soma ou subtração de polinômios, o grau do polinômio resultante é menor ou igual ao maior grau dentre os graus dos polinômios operados.

$$\partial(P + D) \leq \text{máx}\{\partial P, \partial D\} \text{ e } \partial(P - D) \leq \text{máx}\{\partial P, \partial D\}$$

A **multiplicação** de polinômios é feita aplicando-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtração.

Exemplo: Se $P(x) = 2x^3 - x - 1$ e $D(x) = x^2 - x + 2$, temos:

$$P(x) \cdot D(x) = (2x^3 - x - 1) \cdot (x^2 - x + 2) = 2x^3 \cdot (x^2 - x + 2) - x \cdot (x^2 - x + 2) - 1 \cdot (x^2 - x + 2) =$$

$$= 2x^5 - 2x^4 + 4x^3 - x^3 + x^2 - 2x - x^2 + x - 2 = 2x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x - 2$$

Na multiplicação de polinômios não identicamente nulos, o grau do produto é igual à soma dos graus de cada um dos fatores.

$$\partial(P \cdot D) = \partial P + \partial D$$

Considerando os polinômios do exemplo acima, temos $\partial P = 3$ e $\partial D = 2$, portanto $\partial(P \cdot D) = 3 + 2 = 5$.

A **divisão** de polinômios é feita com base no algoritmo da divisão de Euclides, de forma similar à divisão inteira. Assim, para dividir o polinômio $P(x)$ (dividendo) pelo polinômio $D(x)$ (divisor)

devemos encontrar dois polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, denominados quociente e resto, respectivamente, que satisfazem

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

onde $\partial R < \partial D$ ou $R(x) = 0$.

Se $D(x) \neq 0$, então $\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$.

Se o grau do dividendo é inferior ao grau do divisor, o quociente é nulo e o resto é igual ao próprio dividendo.

$$\partial P < \partial D \Rightarrow Q(x) = 0 \ \wedge \ R(x) = P(x)$$

Se o grau do dividendo é superior ao grau do divisor $(\partial P > \partial D)$, a divisão pode ser efetuada pelo seguinte algoritmo denominado **Método da Chave**.

I) Ordenam-se $P(x)$ e $D(x)$ segundo as potências decrescentes de x, incluindo os termos do dividendo que possuem coeficiente 0.

II) Divide-se o primeiro termo de $P(x)$ pelo primeiro termo de $D(x)$, obtendo-se o primeiro termo do quociente.

III) Multiplica-se $D(x)$ pelo primeiro termo do quociente e subtrai-se o resultado de $P(x)$, obtendo-se o primeiro resto parcial.

IV) Com o primeiro resto parcial e o divisor $D(x)$ repetem-se as operações, obtendo-se o segundo termo do quociente e assim sucessivamente até se encontrar um resto de grau menor que o divisor ou nulo.

Exemplo: Se $P(x) = 2x^3 - x - 1$ e $D(x) = x^2 - x + 2$, temos:

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 + 0x^2 - x - 1 & x^2 - x + 2 \\ \cline{2-2}
-2x^3 + 2x^2 - 4x \quad & 2x + 2 \\ \cline{1-1}
2x^2 - 5x - 1 & \\
-2x^2 + 2x - 4 & \\ \cline{1-1}
-3x - 5 &
\end{array}$$

Logo, o quociente é $Q(x) = 2x + 2$ e o resto $R(x) = -3x - 5$. Observe que isso implica que $2x^3 - x - 1 = (x^2 - x + 2) \cdot (2x + 2) + (-3x - 5)$ é uma identidade, ou seja, essa igualdade é verdadeira para qualquer valor da variável x.

Numa divisão de polinômios, na qual o grau do dividendo é superior ao grau do divisor, o grau do quociente é igual à diferença dos graus do dividendo e do divisor.

$$\partial(Q) = \partial P - \partial D$$

Considerando os polinômios do exemplo acima, temos $\partial P = 3$ e $\partial D = 2$, portanto $\partial(Q) = 3 - 2 = 1$.

A divisão de polinômios também pode ser efetuada pelo **método de Descartes ou método dos coeficientes a determinar**, que é uma aplicação da identidade de polinômios. Nesse método, parte-se da expressão $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$, onde $\partial Q = \partial P - \partial D$ e $\partial R_{MÁX} = \partial D - 1$. O quociente e o resto são obtidos igualando-se os coeficientes dos dois lados.

Teorema de D'Alembert (divisão por binômio do 1º grau):

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $ax + b$, com $a \neq 0$, é igual a $P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Demonstração: Na divisão de $P(x)$ por $ax + b$ o resto deve ter grau zero. Assim, podemos dizer que a divisão terá um quociente $Q(x)$ e resto $R(x) = R$ constante. Logo,

$$P(x) = (ax + b) \cdot Q(x) + R \Rightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right) = \underbrace{\left(a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + b\right)}_{0} \cdot Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R \Leftrightarrow R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Exemplo: O resto de $P(x) = 2x^3 - x - 1$ por $x + 1$ é $P(-1) = 2(-1)^3 - (-1) - 1 = -2$.

O polinômio $P(x)$ é divisível por $ax + b$, com $a \neq 0$, se, e somente se, $P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.

Exemplo: $P(x) = 2x^3 - x - 1$ é divisível por $(x - 1)$, pois $P(1) = 2 \cdot 1^3 - 1 - 1 = 0$. Isso é fato, visto que $P(x) = 2x^3 - x - 1 = (2x^2 + 2x + 1)(x - 1)$.

Regra de Ruffini-Horner:

Para dividir um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ por $x - a$, devemos seguir o seguinte algoritmo:

1º) na primeira linha do diagrama, dispomos a raiz $\underline{a}$ do divisor na coluna à esquerda e a seguir os coeficientes de $P(x)$, inclusive os nulos;

$$\begin{array}{c|ccccccc} a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & & & & & & & \end{array}$$

2º) na segunda linha do diagrama, dispomos o coeficiente do primeiro termo do dividendo que será o coeficiente do primeiro termo do quociente;

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
	a_n $\downarrow$ q_{n-1}						

3º) à direita do termo anterior colocamos $a \cdot q_{n-1} + a_{n-1} = q_{n-2}$, coeficiente do segundo termo do quociente;

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
	a_n $\downarrow$ q_{n-1}	$a \cdot q_{n-1} + a_{n-1}$ $\downarrow$ q_{n-2}					

4º) repete-se a operação descrita no item anterior até atingirmos q_0;

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
	a_n $\downarrow$ q_{n-1}	$a \cdot q_{n-1} + a_{n-1}$ $\downarrow$ q_{n-2}	$a \cdot q_{n-2} + a_{n-2}$ $\downarrow$ q_{n-3}	$\cdots$	$a \cdot q_2 + a_2$ $\downarrow$ q_1	$a \cdot q_1 + a_1$ $\downarrow$ q_0	

5º) repetindo o procedimento mais uma vez obtemos o resto $r = a \cdot q_0 + a_0$ da divisão.

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
	a_n $\downarrow$ q_{n-1}	$a \cdot q_{n-1} + a_{n-1}$ $\downarrow$ q_{n-2}	$a \cdot q_{n-2} + a_{n-2}$ $\downarrow$ q_{n-3}	$\cdots$	$a \cdot q_2 + a_2$ $\downarrow$ q_1	$a \cdot q_1 + a_1$ $\downarrow$ q_0	$a \cdot q_0 + a_0$ $\downarrow$ r

Exemplo: A divisão de $P(x) = 2x^3 - x - 1$ por $(x-1)$ resulta em um quociente $Q(x) = 2x^2 + 2x + 1$ e em um resto $R(x) = 0$.

1	2	0	-1	-1
	2	$1 \cdot 2 + 0 = 2$	$1 \cdot 2 + (-1) = 1$	$1 \cdot 1 + (-1) = 0$

****

11) Duas pessoas constituíram uma sociedade: a primeira entrou com um capital de R$ 5.000,00 e a segunda com R$ 6.000,00. Um ano depois, admitiram um terceiro sócio, que entrou com um capital de R$ 10.000,00. Decorridos 18 meses desde o início da sociedade, a firma teve um lucro de R$ 12.900,00. A parte do lucro que caberá ao terceiro sócio é:

(A) R$ 1.000,00
(B) R$ 2.000,00
(C) R$ 3.000,00
(D) R$ 4.000,00
(E) R$ 5.000,00

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
A primeira pessoa investe um capital de $R\$ 5.000,00$ durante 18 meses, a segunda pessoa investe um capital de $R\$ 6.000,00$ durante 18 meses e a terceira pessoa investe um capital de $R\$ 10.000,00$ durante 6 meses.
A parcela do lucro recebida por cada uma das três pessoas é proporcional ao produto do capital pelo tempo. Sejam x, y e z as parcelas do lucro correspondentes à primeira, segunda e terceira pessoas, respectivamente, então, temos:

$$\frac{x}{5000 \cdot 18} = \frac{y}{6000 \cdot 18} = \frac{z}{10000 \cdot 6} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{18} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{15+18+10} = \frac{12900}{43} = 300$$

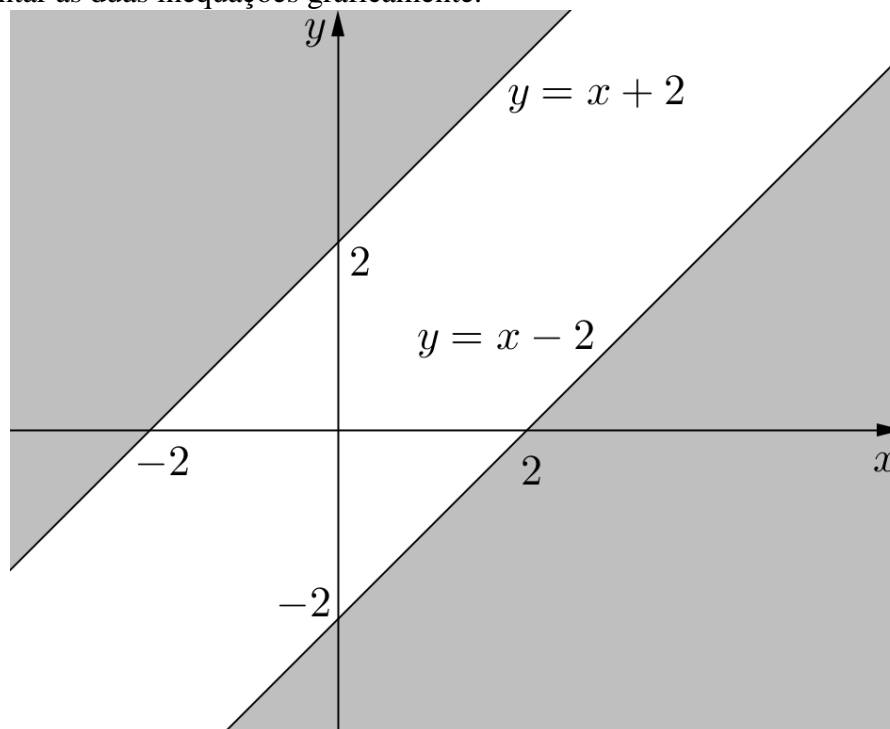
$\Rightarrow x = 4500,\ y = 5400$ e $z = 3000$

Logo, o terceiro sócio receberá $R\$ 3.000,00$.

12) O sistema $\begin{cases} y \geq x+2 \\ y \leq x-2 \end{cases}$

(A) não tem solução.
(B) tem solução contida no 4º quadrante.
(C) tem solução que contem o 2º quadrante.
(D) é satisfeito por apenas um ponto do plano cartesiano.
(E) tem solução apenas para $y \geq 2$.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Vamos representar as duas inequações graficamente.

A inequação $y \geq x+2$ corresponde ao semiplano acima da reta $y = x+2$ incluindo a reta e a inequação $y \leq x-2$ corresponde ao semiplano abaixo da reta $y = x-2$ incluindo a reta.
As duas retas possuem coeficiente angular igual a 1 e, portanto, são paralelas. Dessa forma, as regiões determinadas pelas duas inequações não possuem interseção e o sistema não possui solução.

13) Um vendedor de refresco acondiciona o seu produto numa caixa de isopor com as seguintes dimensões internas: $1\text{ m} \times 60\text{ cm} \times 40\text{cm}$. Cada copo de refresco de 300 ml é vendido por $R\$0,40$. Nestas condições, ao término de um dia de trabalho, pela venda de uma quantidade de refresco correspondente a $\frac{3}{4}$ da capacidade da caixa, o vendedor apurou:

(A) $R\$\,360,00$
(B) $R\$\,300,00$
(C) $R\$\,270,00$
(D) $R\$\,330,00$
(E) $R\$\,240,00$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
O volume da caixa é $V = 100 \cdot 60 \cdot 40 = 240.000\text{ cm}^3 = 240.000\text{ ml}$. O volume de $\frac{3}{4}$ da capacidade da caixa é $\frac{3}{4} \cdot V = \frac{3}{4} \cdot 240.000 = 180.000\text{ ml}$.

Como cada copo de refresco contém 300 ml, a quantidade de copos vendida foi $\frac{180.000}{300} = 600$ e o valor apurado foi $600 \cdot 0,40 = 240$ reais.

14) O maior divisor comum dos polinômios $x^4 - 16$, $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ e $x^4 - 8x^2 + 16$ é:
(A) $x+2$
(B) $x+4$
(C) $x-2$
(D) $x-4$
(E) 1

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, devemos fatorar as três expressões. O maior divisor comum (M.D.C.) entre elas será obtido tomando-se os fatores comuns às três fatorações com seus menores expoentes.

$$x^4 - 16 = (x^2+4)(x^2-4) = (x^2+4)(x+2)(x-2)$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3 \cdot 2 \cdot x^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot x - 2^3 = (x-2)^3$$

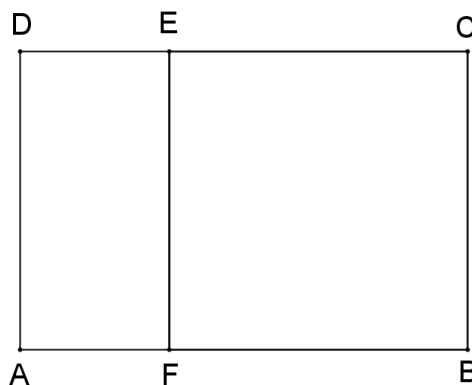
$$x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2)^2 - 2 \cdot 4 \cdot x^2 + 4^2 = (x^2-4)^2 = [(x+2)(x-2)]^2 = (x+2)^2(x-2)^2$$

Logo, o maior divisor comum dos três polinômios é $(x-2)$.

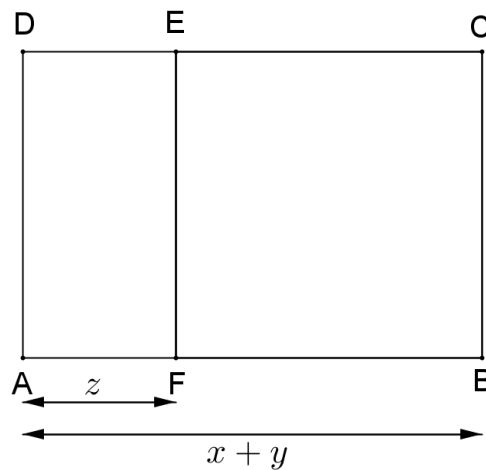
15) Uma equação biquadrada tem duas raízes respectivamente iguais a $\sqrt{2}$ e 3. O valor do coeficiente do termo de $2°$ grau dessa equação é:
(A) 7
(B) -7
(C) 11
(D) -11
(E) 1

RESPOSTA: D

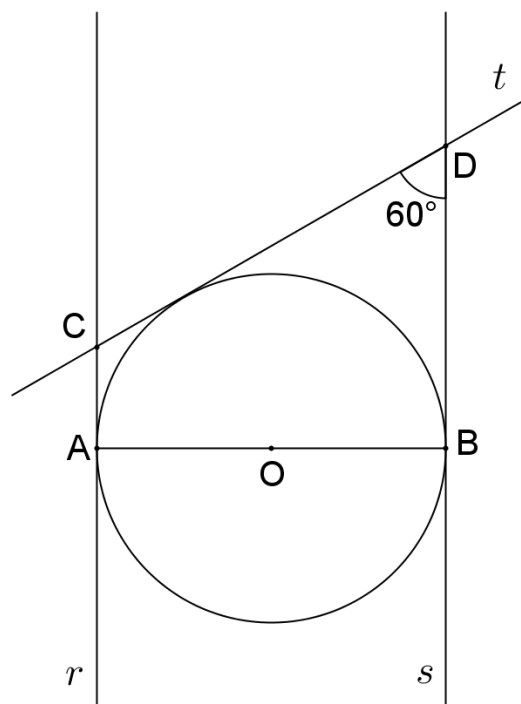
RESOLUÇÃO:
Se $\sqrt{2}$ e 3 são duas raízes de uma equação biquadrada, então a equação do 2° grau resolvente tem raízes $y_1 = (\sqrt{2})^2 = 2$ e $y_2 = 3^2 = 9$.
Assim, a equação resolvente, resultado da substituição $y = x^2$ na equação biquadrada original é dada por: $y^2 - (2+9)y + 2 \cdot 9 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 11y + 18 = 0$.
Portanto, a equação biquadrada original é $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ cujo coeficiente do termo do 2° grau é -11.

16) O retângulo $ABCD$ da figura abaixo tem base igual a $x + y$. O segmento $\overline{AF}$ tem medida z. Sabe-se que $x^2 + y^2 + z^2 = 3{,}54$ e que $xz + yz - xy = 0{,}62$. A área do quadrado $FBCE$ é

(A) 2
(B) $2{,}1$
(C) $2{,}3$
(D) $2{,}7$
(E) $2{,}5$

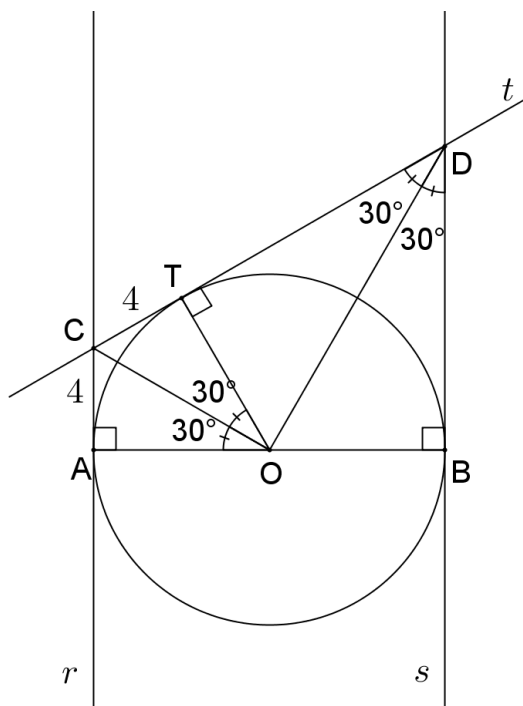
RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

O lado do quadrado FBCE é $x+y-z$, então sua área é dada por:

$S_{FBCE} = (x+y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy - xz - yz) = 3,54 + 2 \cdot (-0,62) = 2,3$ unidades de área

17) Na figura abaixo, as retas r, s e t são tangentes à circunferência de diâmetro $\overline{AB}$. O segmento $\overline{AC}$ mede 4 cm. A medida, em centímetros, do segmento $\overline{CD}$ é:

(A) 16
(B) 14
(C) 12
(D) 8
(E) 20

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Seja T o ponto de tangência da reta t com a circunferência, então $\overline{OT} \perp t$.

$A\hat{O}T = B\hat{D}T = 60^\circ$, pois são ângulos de lados perpendiculares.

$\Delta AOC \equiv \Delta TOC \text{ (L.A.L.)} \Rightarrow A\hat{O}C = T\hat{O}C = 30^\circ$

$\Delta BOD \equiv \Delta TOD \text{ (L.A.L.)} \Rightarrow B\hat{D}O = T\hat{D}O = 30^\circ$

No triângulo retângulo AOC, temos $\text{tg}\,30^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \overline{AO} = 4\sqrt{3}$.

Note ainda que $\overline{OT} = \overline{OB} = \overline{OA} = 4\sqrt{3}$, pois os três segmentos são raios da circunferência.

No triângulo retângulo DTO, temos $\text{tg}\,30^\circ = \frac{\overline{OT}}{\overline{DT}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\overline{DT}} \Leftrightarrow \overline{DT} = 12$.

$\overline{CT} = \overline{CA} = 4$, pois são segmentos tangentes à mesma circunferência.

Portanto, $\overline{CD} = \overline{CT} + \overline{DT} = 4 + 12 = 16\text{ cm}$.

18) O número de triângulos de perímetro igual a 19, uma das alturas igual a 4, inscritíveis num círculo de raio 5, e cujos lados têm medidas expressas por números inteiros é:

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

RESPOSTA: A

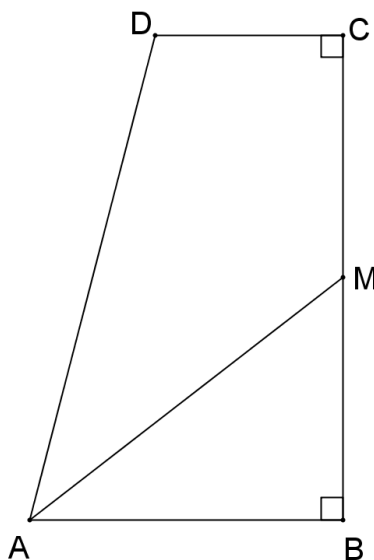
RESOLUÇÃO:
Sejam a, b e c os lados do triângulo, onde $a, b, c \in \mathbb{Z}_+^*$.

Pela desigualdade triangular, $c < a + b \Rightarrow 2c < a + b + c = 2p = 19 \Leftrightarrow c < \frac{19}{2} \Rightarrow c \le 9$.

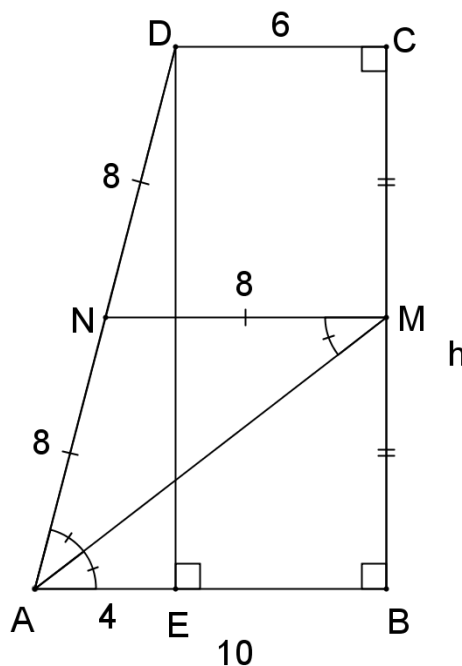
Assim, conclui-se que cada um dos lados do triângulo deve possuir medida inferior a 9.
Seja, sem perda de generalidade, $h = 4$ a altura relativa ao lado c, e seja S a área do triângulo, então temos:

$$S = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R} \Leftrightarrow a \cdot b = 2 \cdot R \cdot h = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$$

Como $a \mid 40$, $b \mid 40$ e $a, b \le 9$, então $a = 8$ e $b = 5$.
Como $2p = 19$, então $c = 6$.
Logo, há apenas 1 triângulo que satisfaz as condições do enunciado.

19) O trapézio ABCD da figura é retângulo de bases AB de medida 10 e CD de medida 6. A bissetriz do ângulo Â intercepta BC no seu ponto médio M. A altura do trapézio é igual a:

(A) $2\sqrt{15}$
(B) $8\sqrt{15}$
(C) $6\sqrt{15}$
(D) $4\sqrt{15}$
(E) $5\sqrt{15}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Seja N ponto médio de AD e E a projeção do ponto D sobre AB.

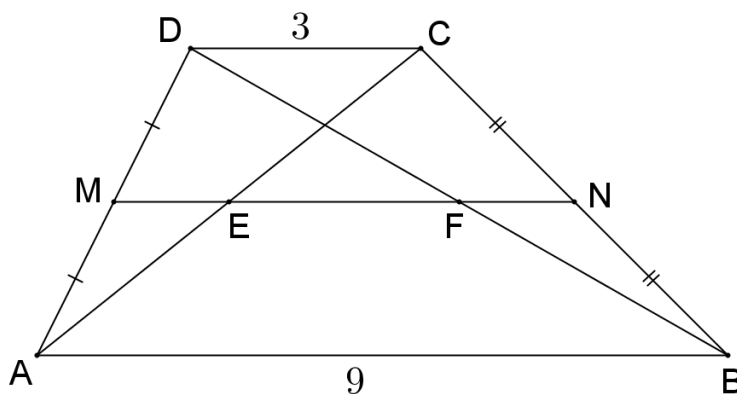
$B\hat{A}M = M\hat{A}N = A\hat{M}N \Rightarrow AN = ND = AM = \frac{AB+CD}{2} = 8$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔADE: $h^2 + 4^2 = 16^2 \Leftrightarrow h^2 = 240 \Leftrightarrow h = 4\sqrt{15}$

20) As bases de um trapézio medem 3 cm e 9 cm. Os segmentos determinados pelas diagonais do trapézio sobre a base média são proporcionais aos números:

(A) $1, 1, 1$
(B) $1, 2, 1$
(C) $1, 3, 1$
(D) $1, 4, 1$
(E) $2, 3, 4$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Seja o trapézio $ABCD$ da figura de bases $\overline{AB}=9$ e $\overline{CD}=3$. Sejam M e N os pontos médios dos lados não paralelos, então $\overline{MN}$ é a base média do trapézio o que implica $\overline{MN}\,||\,\overline{AB}\,||\,\overline{CD}$ e $\overline{MN}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}=\frac{9+3}{2}=6$.

Note que, como M é ponto médio de $\overline{AD}$ e $\overline{ME}\,||\,\overline{DC}$, então $\overline{ME}$ é base média do ΔACD e $\overline{ME}=\frac{\overline{CD}}{2}=\frac{3}{2}$.

Da mesma forma, como N é ponto médio de $\overline{BC}$ e $\overline{NF}\,||\,\overline{DC}$, então $\overline{NF}$ é base média do ΔBCD e $\overline{NF}=\frac{\overline{CD}}{2}=\frac{3}{2}$.

Assim, temos $\overline{EF}=\overline{MN}-\overline{ME}-\overline{NF}=6-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=3$.

Os segmentos determinados pelas diagonais sobre a base média são $\left(\overline{ME},\overline{EF},\overline{FN}\right)=\left(\frac{3}{2},3,\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot(1,2,1)$, ou seja, são proporcionais aos números 1, 2, 1.

21) O intervalo solução da inequação $(x+3)(x+2)(x-3)>(x+2)(x-1)(x+4)$ é:

(A) $\left(-\infty,\ -\frac{5}{3}\right)$

(B) $(-\infty,\ -1)$

(C) $\left(-2,\ -\frac{5}{3}\right)$

(D) $\left(-\frac{5}{3},\ +\infty\right)$

(E) $(-1,\ 2)$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$(x+3)(x+2)(x-3)>(x+2)(x-1)(x+4)\Leftrightarrow(x+3)(x+2)(x-3)-(x+2)(x-1)(x+4)>0$$

$$\Leftrightarrow(x+2)\left[(x+3)(x-3)-(x-1)(x+4)\right]>0\Leftrightarrow(x+2)\left[\left(x^2-9\right)-\left(x^2+3x-4\right)\right]>0$$

$$\Leftrightarrow(x+2)(-3x-5)>0\Leftrightarrow-2<x<-\frac{5}{3}$$

$$S=\left]-2,-\frac{5}{3}\right[$$

22) Em um triângulo os lados de medidas m e n são opostos, respectivamente, aos ângulos de 60° e 40°. O segmento da bissetriz do maior ângulo interno do triângulo é dado por:

(A) $m\cdot\sqrt{\frac{m+n}{n}}$

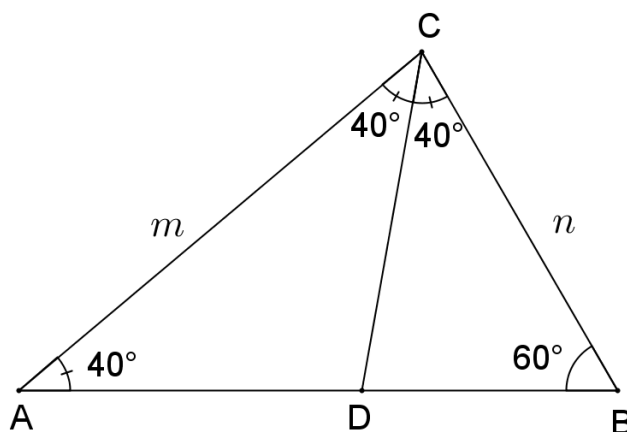
(B) $n\cdot\sqrt{\frac{m+n}{m}}$

(C) $m\cdot\sqrt{\frac{n}{m+n}}$

(D) $n\cdot\sqrt{\frac{m}{m+n}}$

(E) $\sqrt{\frac{m}{n}}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Seja o triângulo ABC que satisfaz as condições do enunciado e $\overline{CD}$ a bissetriz do maior ângulo interno $\hat{C}=80^\circ$.

Pelo teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}\Leftrightarrow\frac{m}{\overline{AD}}=\frac{n}{\overline{BD}}=\frac{m+n}{\overline{AD}+\overline{BD}}=\frac{m+n}{\overline{AB}}\Leftrightarrow\overline{AB}=\frac{m+n}{m}\cdot\overline{AD}$$

$$\Delta ABC\sim\Delta CBD\ (\text{A.A.A.})\Rightarrow\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\Leftrightarrow\frac{\overline{AD}}{m}=\frac{n}{\overline{AB}}\Leftrightarrow\overline{AD}\cdot\overline{AB}=m\cdot n$$

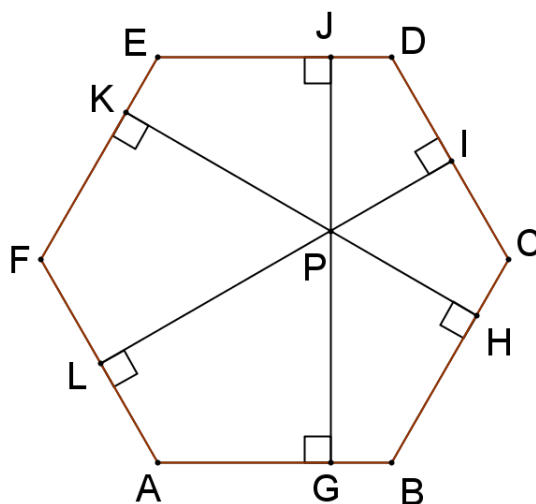
Substituindo a expressão obtida anteriormente para $\overline{AB}$, temos:

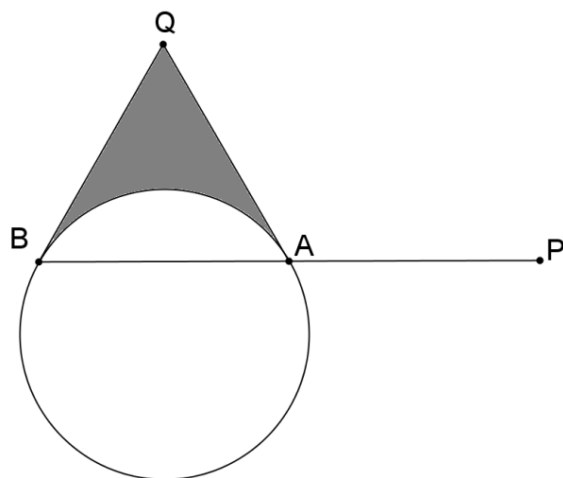
$$\overline{AD}\cdot\left(\frac{m+n}{m}\cdot\overline{AD}\right)=m\cdot n\Leftrightarrow\overline{AD}^2=\frac{m^2\cdot n}{m+n}\Leftrightarrow\overline{AD}=m\cdot\sqrt{\frac{n}{m+n}}.$$

Como o ΔADC é isósceles, então $\overline{CD}=\overline{AD}=m\cdot\sqrt{\frac{n}{m+n}}$.

23) Considere um ponto P interno a um hexágono regular de lado igual a 6 cm. A soma das distâncias de P a cada uma das retas suportes dos lados deste hexágono
(A) depende da localização de P.
(B) é igual a 36 cm.
(C) é igual a 18 cm.
(D) é igual a $12\sqrt{3}$ cm.
(E) é igual a $18\sqrt{3}$ cm.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Seja $ABCDEF$ um hexágono regular de lado 6 cm. Como os lados opostos do hexágono regular são paralelos, então a soma das distâncias de um ponto P qualquer, interno ao hexágono, às retas suportes dos lados é igual a $\overline{GJ}+\overline{HK}+\overline{IL}$, ou seja, três vezes a distância entre dois lados opostos.
A distância entre dois lados opostos é igual ao dobro da altura do triângulo equilátero determinado por um dos lados do hexágono e seu centro, ou seja, $2\cdot\frac{6\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.
Portanto, a soma das distâncias de P a cada uma das retas suportes dos lados do hexágono é $\overline{GJ}+\overline{HK}+\overline{IL}=3\cdot 6\sqrt{3}=18\sqrt{3}$ cm.

24) Na figura abaixo, tem-se: $\overleftrightarrow{QB}$ e $\overleftrightarrow{QA}$ são tangentes ao círculo de raio 2; a medida do segmento $\overline{PA}$ é $2\sqrt{3}$ e a potência do ponto P em relação ao círculo é igual a 24. A área sombreada da figura é igual a

(A) $\frac{4}{3}(2\sqrt{3}-\pi)$

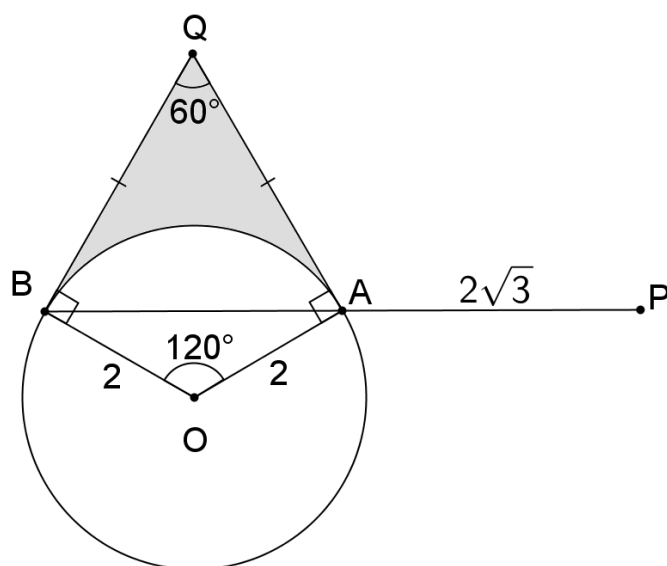
(B) $\frac{4}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$

(C) $\frac{4}{3}(\sqrt{3}-\pi)$

(D) $\frac{4}{3}(4\sqrt{3}-\pi)$

(E) $\frac{4}{3}(6\sqrt{3}-\pi)$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

A potência do ponto P em relação ao círculo é 24, então

$\text{Pot}_O P = PA \cdot PB = 24 \Rightarrow 2\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3} + AB) = 24 \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{3}$.

Como $AB = R\sqrt{3}$, conclui-se que AB é o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência, logo $A\hat{O}B = 120^\circ$.

Os segmentos QB e QA são tangentes à circunferência, então $QA = QB$, $Q\hat{A}O = Q\hat{B}O = 90^\circ$ e, consequentemente, $A\hat{Q}B = 60^\circ$.

O triângulo QAB é equilátero de lado $2\sqrt{3}$, pois $QA = QB$ e $A\hat{Q}B = 60^\circ$.

A área sombreada é, então, igual à área do triângulo equilátero QAB menos a área de um segmento circular de 120° no círculo de centro O.

$$S_{QAB} = \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$$

$$S_{seg.120^\circ} = \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 2^2) - \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \text{sen}\,120^\circ = \frac{4\pi}{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$S_{sombr.} = S_{QAB} - S_{seg.120^\circ} = 3\sqrt{3} - \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) = \frac{4}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$$

25) Num triângulo ABC de lado $\overline{AC} = 12$, a reta $\overleftrightarrow{AD}$ divide internamente o lado $\overline{BC}$ em dois segmentos: $\overline{BD} = 18$ e $\overline{DC} = 6$. Se $A\hat{B}D = x$ e $A\hat{C}D = y$, o ângulo $B\hat{D}A$ é dado por:

(A) $y - x$

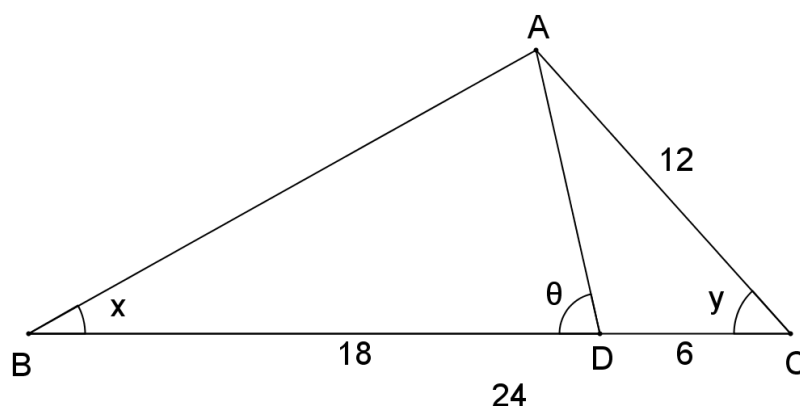
(B) $x + y$

(C) $2x - y$

(D) $2y - x$

(E) $2x + y$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD} = 2$ e $A\hat{C}D$ é comum $\Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta BCA$ $(L_p.A.L_p.) \Rightarrow C\hat{A}D = C\hat{B}A = x$

O ângulo $B\hat{D}A = \theta$ é um ângulo externo do ΔACD, então $\theta = B\hat{D}A = C\hat{A}D + A\hat{C}D = x + y$.

Acompanhe o blog www.madematica.blogspot.com e fique sabendo do lançamento dos próximos volumes da coleção X-MAT!

Volumes já lançados:

Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2011-2015
Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2015
Livro X-MAT Volume 3 EFOMM 2009-2015
Livro X-MAT Volume 4 ESCOLA NAVAL 2010-2015
Livro X-MAT Volume 6 EsPCEx 2011-2016